
Aufgabe 1: Allgemeineres Kronig-Penny Modell (6 Punkte)

Gegeben Sei das Potential

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\lambda_1}{2a} \delta(x - 2na) + \frac{\lambda_2}{2a} \delta(x - (2n-1)a)) \right],$$

wobei $a > 0$, λ_1 und λ_2 beliebige Konstanten seien. Es gibt also Bereiche I_n mit den Grenzen $2(n-1)a$ und $(2n-1)a$ und Bereiche II_n mit den Grenzen $(2n-1)a$ und $2na$. Die Wellenfunktion im Bereich I_n kann analog zur Vorlesung als $u_{I_n}(x) = A_n \cos k[x - (2n-1)a] + B_n \sin k[x - (2n-1)a]$ geschrieben werden mit $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

1. Finden Sie die Bedingung für erlaubte positive Energien $E \geq 0$ für allgemeine Werte von $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

   (a) Geben Sie $u_{II_n}(x)$ an und zeigen Sie, dass

   $$\begin{aligned} A_n &= A_{n+1}[c + \frac{g_1}{2}s] - B_{n+1}[s + \frac{g_1}{2}(1-c)] \\ B_n &= A_{n+1}[s - \frac{g_1}{2}(1+c) - g_2 c - \frac{g_1 g_2}{2}s] + B_{n+1}[c + \frac{g_1}{2}s + g_2 s + \frac{g_1 g_2}{2}(1-c)], \end{aligned}$$

   wobei $s \equiv \sin 2ka$, $c \equiv \cos 2ka$ und $g_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{2ka}$. (2 Punkte)

   (b) Wie hängt A_n (B_n) mit A_{n+1} (B_{n+1}) noch zusammen? Benutzen Sie die Antwort, um die Bedingung

   $$\left| \frac{g_1 g_2}{4} + \left(1 - \frac{g_1 g_2}{4}\right) c + \left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right) s \right| \leq 1$$

   an die Energie herzuleiten. (2 Punkte)

2. (a) Betrachten Sie den Fall $g_1 = g > 0$, $g_2 = g/2$. Zeichnen Sie jeweils das Regime der erlaubten Energien für $g = 1$ und $g = 10$. (1 Punkt)

   (b) Zeigen Sie, dass für $g \to \infty$ nur die Energien $E_n \simeq \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ erlaubt sind. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Ausgelenktes Teilchen im harmonischen Oszillator (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Zustand

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} l}} e^{-(x-x_0)^2/2l^2} \quad \text{mit} \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

1. Drücken Sie $\psi(x,0)$ als Linearkombination von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators aus. (2 Punkte)

   Hinweis: Die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-(x-x_0)^2} H_n(x) = \sqrt{\pi} 2^n x_0^n$ sollte hilfreich sein.

2. Geben Sie $\psi(x,t)$ an. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$?

   Hinweis: Die Formel $e^{-q^2+2qy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} H_n(y)$ sollte weiterhelfen. (2 Punkte)