Aufgabe 1: Absteigeoperatoren und kohärente Zustände (4 Punkte)

Sei $|n\rangle$ der n-te Eigenzustand eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω. Dann gilt $\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$ ($|n\rangle$ sind so-genannte *Fock*-Zustände).

1. Berechnen Sie die normierten Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\hat{a}$, die die Bedingung $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ erfüllen, wobei α eine komplexe Zahl ist. Die Zustände $|\alpha\rangle$ heißen *kohärente Zustände*. Schreiben Sie $|\alpha\rangle$ als Linearkombination der Fock-Zustände hin. (2 Punkte)

   Hinweis: Sie sollten $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ erhalten.

2. Berechnen Sie $\langle\hat{x}\rangle$,$\langle\hat{p}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ für einen kohärenten Zustand. Zeigen Sie, dass $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$ gilt. (1.5 Punkte)

3. Schreiben Sie den zeitentwickelten Zustand $|\alpha(t)\rangle$ hin (am einfachsten wieder in der Fock-Basis) und zeigen Sie, dass $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$ für alle Zeiten gilt. (0.5 Punkte)

Aufgabe 2: Baker-Hausdorff Formel (3 Punkte)

Betrachten Sie zwei lineare Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

1. Zeigen Sie, dass

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + ...$$

   gilt (Baker-Hausdorff Lemma). (1.5 Punkte)

   Hinweis: Sei $f(t) = e^{t\hat{A}}\hat{B}e^{-t\hat{A}}$. Man kann $f(t)$ formal entwickeln als $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{c}_n t^n$. Berechnen Sie $\frac{df(t)}{dt}$ und drücken Sie diese Funktion auch als Potenzreihe in t aus. Damit bekommen Sie $\hat{c}_{n+1}$ als Funktion von $\hat{c}_n$. Damit sollten Sie die gesuchte Beziehung herleiten können.

2. Zeigen Sie, dass

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

   gilt falls $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ (Baker-Hausdorff Theorem). (1.5 Punkte)

   Hinweis: Sei $F(t) = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}$. Benutzen Sie das Resultat des ersten Aufgabenteils, um eine Beziehung der Form $\frac{dF(t)}{dt} = \hat{O}\cdot F(t)$ zu bekommen. Damit sollten Sie die gesuchte Beziehung finden können.

Aufgabe 3: Operatoren und Dirac-Notation (3 Punkte)

Der Hamilton Operator

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ist in der Basis $|1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|2\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|3\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ hermitesch ist. (0.5 Punkte)

2. Berechnen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von $\hat{H}$ (drücken Sie die Eigenvektoren mit Hilfe der Basisvektoren $|1\rangle, |2\rangle$ und $|3\rangle$ aus). Überprüfen Sie, dass die Eigenvektoren orthogonal sind. (1 Punkt)

3. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle \doteq \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$ und $\langle k|\psi(t)\rangle$ für $k = 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass für alle Zeiten t die Summe $\sum_{k=1,2,3} |\langle k|\psi(t)\rangle|^2$ konstant ist, und berechnen Sie den Wert dieser Konstante.

   (1.5 Punkte)