Aufgabe 1: Ausgelenkter harmonischer Oszillator (3 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential des harmonischen Oszillators (HO) der Frequenz ω. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand des Systems gegeben durch

$$|\Psi(t=0)\rangle = e^{-i\hat{p}b/\hbar}|0\rangle,$$

wobei b eine Konstante sei und $|0\rangle$ der Grundzustand des HOs.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle(t)$ im Heisenberg-Bild für $t \geq 0$.

2. Betrachen Sie $|\Phi\rangle = e^{-i\hat{p}b/\hbar}|\Psi\rangle$ und zeigen Sie, dass $\Phi(x+b) = \Psi(x)$ gilt.

   Bemerkung: Deswegen bezeichnet man den Operator $e^{-i\hat{p}b/\hbar}$ als *Translationsoperator* (um die Länge b). Hinweis: Das Baker-Hausdorff Lemma sollte hilfreich sein.

Aufgabe 2: Korrelationsfunktion (2 Punkte)

Untersuchen Sie hier eine sogenannte Korrelationsfunktion, gegeben durch

$$c(t) = \langle \hat{x}(t)\hat{x}(0) \rangle,$$

wobei $\hat{x}(t)$ der Ortsoperator im Heisenberg Bild ist. Berechnen Sie $c(t)$ explizit für den Grundzustand des eindimensionalen HOs.

Aufgabe 3: Schwinger-Boson Repräsentation (3 Punkte)

Betrachten Sie zwei unabhängige HOen mit den Hamilton Operatoren $\hat{H}_A$ und $\hat{H}_B$, und Erzeugern und Vernichtern $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ und $(\hat{b}, \hat{b}^\dagger)$. Die Leiteroperatoren erfüllen folgende Vertauschungsrelationen: $[\hat{a}, \hat{b}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger, \hat{b}] = 0$. Wir wollen nun die Operatoren $\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_z$ betrachten, die wie folgt definiert sind:

$$\hat{J}_+ = \hbar \hat{b}^\dagger \hat{a}, \quad \hat{J}_- = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{b} \qquad \text{wobei} \quad \hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_z = \frac{\hbar}{2}(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a})$$

(das ist die sogenannte Schwinger-Boson Repräsentation der Drehimpulsoperatoren).

1. Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{J}_\pm$ und $\hat{J}_z$ dieselben Vertauschungsregeln wie die Drehmomentoperatoren erfüllen. Berechnen Sie dazu folgende Kommutatoren: $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm], [\hat{J}^2, \hat{J}_z], [\hat{J}_+, \hat{J}_-]$.

2. Betrachten Sie die Zustände $|n_A, n_B\rangle$, die

   $$\hat{H}_A|n_A, n_B\rangle = \hbar\omega_A \left(n_A + \frac{1}{2}\right)|n_A, n_B\rangle \quad \text{und} \quad \hat{H}_B|n_A, n_B\rangle = \hbar\omega_B \left(n_B + \frac{1}{2}\right)|n_A, n_B\rangle$$

   erfüllen. Zeigen Sie, dass $|n_A, n_B\rangle$ Eigenzustände von $\hat{J}_z$ und $\hat{J}^2$ sind, wobei $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$. Berechnen Sie die entsprechenden Eigenwerte. Was spielt hier die Rolle der Quantenzahlen l und m für Drehimpulsoperatoren?

(**Bitte wenden!**)

Exercise 4: Heisenberg-Bewegungsgleichungen (2 Punkte)

Gegeben sei der Hamilton Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \cos^2 q\hat{x},$$

wobei m, V_0 und q konstant sind. Geben Sie die Heisenberg-Gleichungen für die Operatoren $\hat{p}$ und $\hat{x}$ an und die Bewegungsgleichung $\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} =?$ (ohne sie explizit zu lösen).