Aufgabe 1: Zentralpotential (10 Punkte)

Der gesamte Aufgabenzettel dreht sich um das Zentralpotential

$$V(r) = \frac{c}{r^2} + \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

mit den Konstanten $c > 0$, m und ω.

1. Skizzieren Sie das Potential in Abhängigkeit von r, schreiben Sie die entsprechende Radialgleichung hin für $R_{nl}(r)$ [wobei $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$] und überführen Sie diese in eine dimensionslose Gleichung mit Hilfe der Definitionen $r = \rho\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $\tilde{c} = \frac{m}{\hbar^2} c$ und $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$, wobei E die in der Radialgleichung auftauchende Energie ist. (0.5 Punkte)

2. Schreiben Sie nun die dimensionslose Gleichung um in eine Gleichung von $u(\rho) = \rho R(\rho)$. (1 Punkt)

   Hinweis: Sie sollten eine Gleichung der Form $\frac{d^2u}{d\rho^2}(\rho) + F(\rho)u(\rho) = 0$ erhalten, wobei $F(\rho)$ eine Funktion von ρ ist.

3. Zeigen Sie, dass sich $u(\rho)$ (i) im Limes $\rho \to \infty$ wie $e^{-\rho^2/2}$ und (ii) im Limes $\rho \to 0$ wie ρ^χ verhalten muss, wobei $\chi(\chi - 1) = 2\tilde{c} + l(l+1)$. Begründen Sie, warum $\chi > 0$ nötig ist. (1 Punkt)

4. Wählen Sie nun den Ansatz $u(\rho) = \rho^\chi e^{-\rho^2/2} g(\rho)$ und zeigen Sie, dass $g(\rho)$ die Gleichung

$$g'' + \frac{2}{\rho}(\chi - \rho^2)g' + (\epsilon - 2\chi - 1)g = 0 \quad \text{mit} \quad g' = \frac{dg(\rho)}{d\rho}$$

   erfüllen muss. (1 Punkt)

5. Benutzen Sie den Potenzreihenansatz $g(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ und zeigen Sie, dass die Koeffizienten die Rekursionsrelation

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n - (\epsilon - 2\chi - 1)}{(n+2)(n+1) + 2\chi(n+2)}$$

   erfüllen müssen. (2 Punkte)

6. Zeigen Sie, dass die Reihe divergiert, falls der Zähler nicht für einen Wert von n verschwindet und die Serie abbricht. Sie sollten damit die möglichen Energieeigenwerte $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2} + \chi)$ erhalten. (1 Punkt)

   Hinweis: Den Limes $n \to \infty$ zu betrachten könnte hilfreich sein.

7. Drücken Sie χ als Funktion von $\tilde{c}$ und l aus und zeigen Sie, dass man für $c \to 0$ die Energiewerte $E_n = \hbar\omega(n + l + \frac{3}{2})$ erhält (das sind die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators in 3D). Wieviele Zustände haben hier die gleiche Energie, also wie groß ist die Entartung? (1.5 Punkte)

Bitte wenden!

8. Berechnen Sie für $c > 0$ die Grundzustandswellenfunktion $R_0(\rho)$ (ohne sie zu normieren) mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil 4 und 5. Berechnen Sie das Maximum der Radialwahrscheinlichkeitsdichte $\rho^2|R_0(\rho)|^2$ und überprüfen Sie, ob der Radius der maximalen Dichte im Allgemeinen mit dem Radius des Potentialminimums übereinstimmt. (2 Punkte)