Hausübungen Blatt 9 QUANTENMECHANIK I (SS08) Prof. Dr. Luis Santos

Abgabe: bis 01.07.08 in der Vorlesung. *Bitte Namen, Übungsblatt und -gruppe angeben!*

Aufgabe 9-1: Pauli-Matrizen (2.5 Punkte)

Gegeben Sei der Operator

$$\hat{R}_{\vec{a}}(\theta) = \exp(-\frac{i}{2}\,\theta\,\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{a}}) \quad \text{mit} \quad \hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z),$$

wobei $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ die Pauli-Matrizen sind. In dieser Aufgabe sollen Sie diesen Operator untersuchen für einen Vektor $\vec{a}$ in der $x-y$ Ebene, $\vec{a} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$.

1. Schreiben Sie den Operator $\hat{R}_{\vec{a}}(\theta)$ in der Matrix-Darstellung der $\hat{S}_z$-Basis. (1 Punkt)

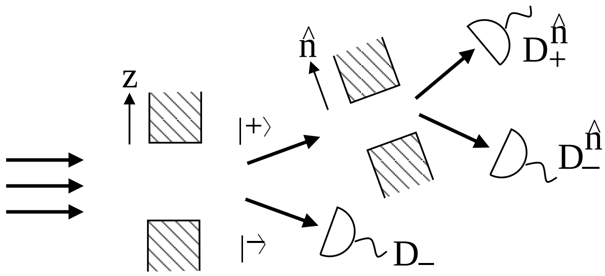
   Nützliche Fragen: Wie schreibt man nochmal die Funktion eines Operators? Was ist die Taylor-Entwicklung von Sinus und Cosinus?

2. Sei $\hat{\sigma}_z|+\rangle = |+\rangle$. Berechnen Sie $|\psi'\rangle = \hat{R}_{\vec{a}}(\theta)|+\rangle$. (0.5 Punkte)

3. Vergleichen Sie $\langle +|\hat{\vec{\sigma}}|+\rangle$ mit $\langle\psi'|\hat{\vec{\sigma}}|\psi'\rangle$. Was ist der Effekt des Operators $\hat{R}_{\vec{a}}(\theta)$? Unterstützen Sie Ihre Antwort mit einer Skizze. (1 Punkt)

Aufgabe 9-2: Doppelter Stern-Gerlach Versuch (2 Punkte)

Ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen befinde sich im Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle + |-\rangle\big)$, wobei $|\pm\rangle$ die Eigenzustände der z-Komponente des Spinoperators, also von $\hat{S}_z$ sind. Das Teilchen durchfliege zuerst einen Stern-Gerlach Apparat in z-Richtung, und der Teil, der in positive z-Richtung abgelenkt wird, durchfliegt dann noch einen Stern-Gerlach Apparat in Richtung $\hat{n}$, die durch die Polarwinkel θ und ϕ gegeben sei.



Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen im Detektor D_-, $D_+^{\hat{n}}$ oder $D_-^{\hat{n}}$ detektiert wird.

Aufgabe 9-3: Magnetischer Kreisel I (3 Punkte)

Der Hamilton Operator eines magnetischen Kreisels in einem Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$\hat{H} = \frac{1}{2\theta_1}(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) + \frac{1}{2\theta_2}\hat{L}_z^2 - g\mu\,\vec{B}\cdot\hat{\vec{L}}.$$

Wir wollen annehmen, dass $\theta_{1,2} > 0$ gilt sowie $\vec{B} = B\hat{z}$ mit $B > 0$ und $g\mu > 0$.

Bitte wenden!

1. Berechnen Sie die Eigenzustände und Eigenenergien von $\hat{H}$. (0.5 Punkte)
2. Finden Sie den Grundzustand in Abhängigkeit von $b \equiv \frac{2g\mu B\theta_1}{\hbar}$ und $R \equiv \frac{\theta_1}{\theta_2}$. (1.5 Punkte)
3. Für welchen Wert von B hat der Grundzustand den Drehimpuls $l = 1$? (0.5 Punkte)
4. Unter welchen Bedingungen ist der Grundzustand entartet? (0.5 Punkte)

Aufgabe 9-4: Magnetischer Kreisel II (2.5 Punkte)

Diese Aufgabe dreht sich auf um den Hamilton Operator des magnetischen Kreisels. Hier sei das Magnetfeld beschrieben durch $\vec{B} = B(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$.

1. Geben Sie die Heisenberg-Gleichungen für die Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ an. (1.5 Punkte)
2. Finden Sie für $\theta = 0$ und $\theta_1 = \theta_2$ die Lösung von $\langle\hat{L}_x\rangle(t)$ und $\langle\hat{L}_y\rangle(t)$ in Abhängigkeit von $\langle\hat{L}_x\rangle(0)$ und $\langle\hat{L}_y\rangle(0)$. (1 Punkt)