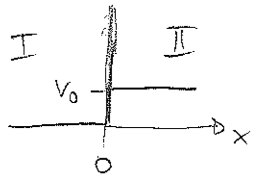
(K1) POTENTIAL:



(1.) TEILCHEN KOMMT VON LINKS

$$\rightarrow \quad u_I(x) = e^{ikx} + R e^{-ikx}, \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$u_{II}(x) = T e^{iqx}, \qquad q = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

ANSCHLUSSBED.:

(A) $u_I(0) = u_{II}(0) \Leftrightarrow 1 + R = T$

$$u_{II}'(0) - u_I'(0) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2\lambda}{2m}\right) u_{II}(0) \quad \leftarrow \text{ANSCHLUSSBED. FÜR DIE } \delta\text{-FKT.}$$

(B) $\Leftrightarrow iqT - (ik - Rik) = \lambda T$

$$\overset{(A)}{\rightarrow} iqT - ik(1 - (T-1)) = \lambda T$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2ik}{i(q+k) - \lambda} \Rightarrow |T|^2 = \frac{4k^2}{(q+k)^2 + \lambda^2}$$

(2.)

$$R = T - 1 = \frac{i(k-q) + \lambda}{i(q+k) - \lambda} \Rightarrow |R|^2 = \frac{\lambda^2 + (k-q)^2}{\lambda^2 + (k+q)^2}$$

(3.) WAHRSCHL. STROM: $j = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \psi' - \psi^{*\prime} \psi\right)$

ALSO:
$$j_I(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\Big[\left(e^{-ikx} + R e^{ikx}\right) ik \left(e^{ikx} - R e^{-ikx}\right) - \left(e^{ikx} + R e^{-ikx}\right)(-ik)\left(e^{-ikx} - R e^{+ikx}\right)\Big]$$

$$= \frac{\hbar k}{m}\left(1 - |R|^2\right)$$

ANALOG: $j_{II}(x) = \frac{\hbar q}{m} |T|^2$

GILT $j_I = j_{II}$?

$$j_I = \frac{\hbar k}{m}\left(1 - |R|^2\right) = \frac{\hbar k}{m}\left(1 - \frac{\lambda^2 + (q-k)^2}{\lambda^2 + (q+k)^2}\right)$$

$$= \frac{\hbar k}{m}\left(\frac{\lambda^2 + (q+k)^2 - \lambda^2 - (q-k)^2}{\lambda^2 + (q+k)^2}\right)$$

$$= \frac{\hbar k}{m}\left(\frac{4qk}{\lambda^2 + (q+k)^2}\right) = \frac{\hbar q}{m}|T|^2 = j_{II} \quad \checkmark$$

WAHR. STROM IST ERHALTEN!

(A2) FÜR DEN H.O. GILT, DASS

(1.)

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega'}}\,(\hat{b}+\hat{b}^\dagger) \iff (\hat{b}+\hat{b}^\dagger) = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\,(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\hat{a}-\hat{a}^\dagger) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega'}{2}}\,(\hat{b}-\hat{b}^\dagger) \iff (\hat{b}-\hat{b}^\dagger) = \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\,(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$$

$\hat{x}$ UND $\hat{p}$
SIND UNABH.
VOM H.O. POTENTIAL

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\,(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) + \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\,(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}\left(\hat{a}(\omega'+\omega)+\hat{a}^\dagger(\omega'-\omega)\right)\\ \hat{b}^\dagger &= \frac{1}{2\sqrt{\omega\omega'}}\left(\hat{a}^\dagger(\omega'+\omega)+\hat{a}(\omega'-\omega)\right)\end{aligned}}$$

(2.)

$$\hat{H}' = \hbar\omega'\left(\hat{b}^\dagger\hat{b}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega'\left(\frac{1}{4\omega\omega'}\left(\hat{a}^\dagger(\omega'+\omega)+\hat{a}(\omega'-\omega)\right)\left(\hat{a}(\omega'+\omega)+\hat{a}^\dagger(\omega'-\omega)\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega'\left(\frac{1}{4\omega\omega'}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}(\omega'+\omega)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger(\omega'-\omega)^2 + \hat{a}^2(\omega'^2-\omega^2) + \hat{a}^{\dagger 2}(\omega'^2-\omega^2)\right) + \frac{1}{2}\right)$$

ALSO: $$\boxed{\langle n|\hat{H}'|n\rangle = \hbar\omega'\left(\frac{1}{4\omega\omega'}\left(n(\omega'+\omega)^2+(n+1)(\omega'-\omega)^2\right)+\frac{1}{2}\right)}$$

(MIT $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$)

(K3) $t=0: \quad \hat{H} = \hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z$

$$\rightsquigarrow |\psi\rangle = |s=\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle_z \equiv |\Downarrow\rangle \qquad (\hat{\sigma}_z |\Uparrow,\Downarrow\rangle = \pm |\Uparrow,\Downarrow\rangle)$$

$$0 < t \leq T: \quad \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega\,\hat{\sigma}_x \underset{\text{IN } \hat{\sigma}_z \text{ BASIS}}{\doteq} \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \hbar\Omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}\omega/2 & \Omega\\ \Omega & -\omega/2\end{pmatrix}$$

1. WIR MÜSSEN DIE EIGENZUSTÄNDE VON $\hat{H}$ FINDEN, UM $|\psi(t)\rangle$ ZU BERECHNEN!

$\boxed{\text{SEI} \quad a = \hbar\omega/2, \; b = \hbar\Omega}$

(a)
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{vmatrix} = -(a-\lambda)(a+\lambda) - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + \lambda^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_\pm = \pm\sqrt{a^2+b^2} \equiv \pm\tilde{\lambda} \qquad \text{EIGENWERTE}$$

(b) EIGENZUSTÄNDE:

$$\lambda_+ : \begin{pmatrix} a-\tilde{\lambda} & b \\ b & -a-\tilde{\lambda} \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}^{\equiv |+\rangle} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a-\tilde{\lambda})x + by \\ bx - (a+\tilde{\lambda})y \end{pmatrix} = 0$$

MATRIX IST REELL $\rightarrow$ EIGENVEKTOREN AUCH

WEGEN NORMIERUNG GILT DANN $x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$.

ϕ IST BESTIMMT DURCH

$$bx - (a+\tilde{\lambda})y = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{b}{a+\tilde{\lambda}} = \boxed{\frac{\Omega}{\omega/2 + \sqrt{\Omega^2 + \frac{\omega^2}{4}}} = \tan\phi}$$

MIT $\cos\phi \equiv c$ UND $\sin\phi \equiv s$ IST ALSO

$$|+\rangle = c|\Uparrow\rangle + s|\Downarrow\rangle$$
$$|-\rangle = -s|\Uparrow\rangle + c|\Downarrow\rangle \quad \text{(WEGEN ORTHONORMALITÄT)}$$

ALSO IST $|\Downarrow\rangle = s|+\rangle + c|-\rangle$

DAMIT IST $|\psi(t)\rangle = \sin\phi \, e^{-i\lambda_+ t/\hbar} |+\rangle + \cos\phi \, e^{i\lambda_- t/\hbar} |-\rangle$

$= \sin\phi \, e^{-i\tilde\lambda t/\hbar} |+\rangle + \cos\phi \, e^{i\tilde\lambda t/\hbar} |-\rangle$ für $t \leq T$

AB $t=T$ IST $\hat H = \frac{\hbar\omega}{2}\hat\sigma_z$

ALSO MÜSSEN WIR DANN DEN ZUSTAND

$$|\psi(T)\rangle = \sin\phi \, e^{-i\tilde\lambda T/\hbar} |+\rangle + \cos\phi \, e^{i\tilde\lambda T/\hbar} |-\rangle$$

IN DER z-BASIS SCHREIBEN:

$$|\psi(T)\rangle = s e^{-i\tilde\lambda T/\hbar}(c|\uparrow\rangle + s|\downarrow\rangle) + c e^{i\tilde\lambda T/\hbar}(-s|\uparrow\rangle + c|\downarrow\rangle)$$

$$= |\uparrow\rangle\left(cs e^{-i\tilde\lambda T/\hbar} - cs e^{i\tilde\lambda T/\hbar}\right) + |\downarrow\rangle\left(s^2 e^{-i\tilde\lambda T/\hbar} + c^2 e^{i\tilde\lambda T/\hbar}\right)$$

$$= \overbrace{-cs\,2i\,\sin\tilde\lambda T/\hbar}^{A} |\uparrow\rangle + \underbrace{\left(s^2 e^{-i\tilde\lambda T/\hbar} + c^2 e^{i\tilde\lambda T/\hbar}\right)}_{B} |\downarrow\rangle$$

$$\xrightarrow{t>T} A e^{-i\omega(t-T)/2} |\uparrow\rangle + B e^{i\omega(t-T)/2} |\downarrow\rangle$$

2. $\langle\psi(t)|\frac{\hbar\omega}{2}\hat\sigma_z|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(|A|^2 - |B|^2\right)$ NUR ABH. VON T, NICHT VON $t>T$!

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\sin^2 2\phi \sin^2\tilde\lambda T/\hbar - \left(s^2 e^{-i\tilde\lambda T/\hbar} + c^2 e^{i\tilde\lambda T/\hbar}\right) \times \left(s^2 e^{i\tilde\lambda T/\hbar} + c^2 e^{-i\tilde\lambda T/\hbar}\right)\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\sin^2 2\phi \sin^2\tilde\lambda T/\hbar - \left(s^4 + c^4 + s^2c^2\left(e^{-i2\tilde\lambda T/\hbar} + e^{i2\tilde\lambda T/\hbar}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\sin^2 2\phi \sin^2\tilde\lambda T/\hbar - \left(s^4 + c^4 + 2s^2c^2\cos 2\tilde\lambda T/\hbar\right)\right)$$

KONTROLLE: FÜR $t = 0$ GEHT DER AUSDRUCK ÜBER IN

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left(0 - (s^4 + c^4 + 2s^2c^2)\right) = -\frac{\hbar\omega}{2}$$

WIE ERWARTET ✓

K4

1.

$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{2}$ SPIN DER 3 TEILCHEN

WELCHE WERTE KÖNNEN DIE ANDEREN QUANTENZAHLEN ANNEHMEN?

$\vec{S}_{12} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \longrightarrow S_{12} = |S_1 - S_2|, \dots, |S_1 + S_2| = 0, 1$

$\vec{S}_{123} = \vec{S}_{12} + \vec{S}_3 \longrightarrow S_{123} = |S_{12} - S_3|, \dots, |S_{12} + S_3| = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{FALLS } S_{12} = 0 \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} & \text{FALLS } S_{12} = 1 \end{cases}$

M LÄUFT VON $-S_{123}$ BIS $+S_{123}$.

$M = \pm \frac{1}{2}$ FALLS $S_{123} = \frac{1}{2}$

$M = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ FALLS $S_{123} = 3/2$

EIGENZUSTÄNDE: $|S_1, S_2, S_3 ; S_{12}, S_{123}, M\rangle \equiv |S_{12}, S_{123}, M\rangle$

$\hat{\vec{S}}_{12}^{\,2} |S_{12}, S_{123}, M\rangle = \hbar^2 S_{12}(S_{12}+1) |S_{12}, S_{123}, M\rangle$

$\hat{\vec{S}}_{123}^{\,2} |S_{12}, S_{123}, M\rangle = \hbar^2 S_{123}(S_{123}+1) |S_{12}, S_{123}, M\rangle$

$\hat{S}_{123}^{(z)} |S_{12}, S_{123}, M\rangle = \hbar M |S_{12}, S_{123}, M\rangle$

AUFTRETENDE EIGENZUSTÄNDE:

$$|S_{12}, S_{123}, M\rangle = \begin{cases} |0, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle \\ |1, \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2}\rangle \end{cases}$$

2.

$\hat{\vec{S}}_{123}^{\,2} = \hat{\vec{S}}_1^{\,2} + \hat{\vec{S}}_2^{\,2} + \hat{\vec{S}}_3^{\,2} + 2\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 + 2\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_3 + 2\hat{\vec{S}}_2 \cdot \hat{\vec{S}}_3$

$\longrightarrow \hat{H} = \frac{\gamma}{2}\left(\hat{\vec{S}}_{123}^{\,2} - \hat{\vec{S}}_1^{\,2} - \hat{\vec{S}}_2^{\,2} - \hat{\vec{S}}_3^{\,2}\right)$

$\hat{H} |S_{12}, S_{123}, M\rangle = \frac{\hbar^2 \gamma}{2}\left(S_{123}(S_{123}+1) - 3 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)$

$= \frac{\hbar^2 \gamma}{2}\left(S_{123}(S_{123}+1) - \frac{9}{4}\right)$

GRUNDZUSTAND: $S_{123} = \frac{1}{2}$

ES GIBT 4 ZUSTÄNDE MIT $S_{123} = \frac{1}{2}$:

$$\left|0, \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\right\rangle$$
$$\left|1, \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$\Rightarrow$ ENTARTUNGSGRAD IST GLEICH 4

K5

$$\hat{H} = \underbrace{\sqrt{\hat{p}^2c^2 + m^2c^4}} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

1.

$$= mc^2\sqrt{1+\underbrace{\frac{p^2}{m^2c^2}}_{\ll 1}} \cong mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^2 + \cdots\right)$$

(BENUTZE TAYLOR ENTW. UM $x=0$: $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$)

$$\cong \cancel{mc^2} + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}$$

WIR NEHMEN m ALS KONSTANT AN. EINE KONSTANTE ENERGIEVERSCHIEBUNG VON $\hat{H}$ IST EXP. NICHT RELEVANT, DA NUR ENERGIEUNTERSCHIEDE MESSBAR SIND.

$$\boxed{\hat{H} \cong \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2}_{\hat{H}_0} \underbrace{- \frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2}}_{\hat{H}_1}}$$

2.

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

1. ORDER CORRECTION TO $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$:

$$E_n^{(1)} = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle n|\,\hat{p}^4\,|n\rangle$$

$$= -\frac{1}{8m^3c^2}\frac{(\hbar m\omega)^2}{4}\langle n|(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)^4|n\rangle$$

[NUR TERME MIT 2 ERZEUGERN UND 2 VERNICHTERN TRAGEN BEI. BEI DENEN IST DAS VORZEICHEN $(-1)^2 = 1$]

$$= -\frac{(\hbar\omega)^2}{32mc^2}\langle n|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)|n\rangle$$

[$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$]

$$= -\frac{(\hbar\omega)^2}{32mc^2}\Big(\underbrace{n(n-1) + n^2 + n(n+1) + n(n+1) + (n+1)^2 + (n+1)(n+2)}\Big)$$

$$= n^2 - \cancel{n} + n^2 + n^2 + \cancel{n} + n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 3n + 2$$

$$= 6n^2 + 6n + 3$$

ALSO IST $\boxed{E_n \cong \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\hbar\omega}{32mc^2}(6n^2+6n+3)\right)}$