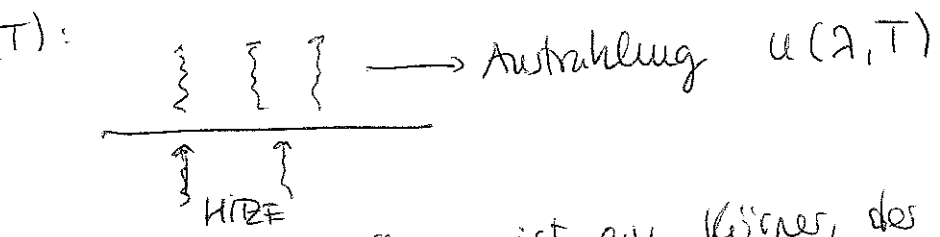


• DIE KRISE DER KLASSISCHEN PHYSIK

Am Ende des 19. Jahrhunderts schien die Physik fast vollständig verstanden (Newton'sche Mechanik, Maxwell'sche Elektrodynamik, ...).
 Aber in dieser Zeit tauchten experimentelle Befunde auf, die sich nicht mit dem existierenden Gebäude nicht in Einklang bringen ließen.
 Diese Experimente verlangten eine Erklärung, und die Suche nach dieser Erklärung führt in die Quantenphysik.

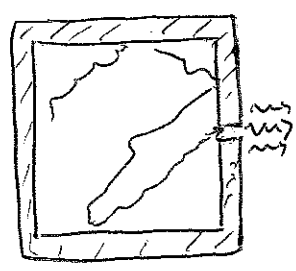
• DIE HOHLRAUMSTRAHLUNG

Wenn ein Körper erhitzt wird, wird der Körper ausstrahlen (thermische Ausstrahlung). In des Gleichgewicht wird die Energiedichte u aufstrahlt in einer bestimmten Wellenlänge λ eine Funktion der Temperatur T :



Ein schwarzer Körper ist ein Körper, der maximal (vollständig) absorbiert. Für einen schwarzen Körper wird $u(\lambda, T)$ eine universelle Funktion von λ und T (also unabhängig des Materials, z.B.).

Um diese Strahlung des schwarzen Körpers zu studieren, kann man folgendes machen. Man bereitet ein (fast vollständig) ~~isolierter~~ geschlossener Hohlraum mit einem kleinen Loch. Der Hohlraum wird erhitzt bis zur T . Die innere Wände des Hohlraums strahlen und absorbieren die Strahlung (Gleichgewicht). Durch den Loch kommt schwarzer-Körper-Strahlung raus.



• Deswegen heißt diese Strahlung (auf Deutsch) Hohlraumstrahlung.

Rayleigh - Jeans - Gesetz (klassisch)

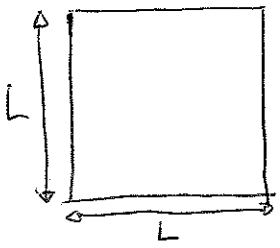
Wir betrachten nun zuerst die klassische Rechnung des Problems (Rayleigh, 1900)

Wir betrachten stehende ebene Wellen im Hohlraum mit reflektierenden Metallwänden (Randbedingungen).

Diese Wellen sind die Lösung der Wellengleichung (mit den Randbed.)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) E_i = 0 \rightarrow E_i = e^{i\omega t} \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3)$$

wobei $\vec{k} = \frac{\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) \rightarrow$ wegen Randbedingungen.
wobei $\omega = c k$

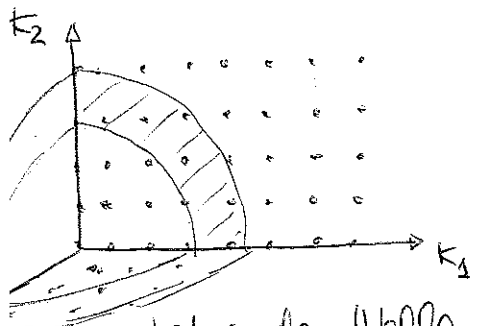


Wir wollen nun die Energiedichte rechnen.

Also wir müssen die Anzahl der Wellen zwischen

ω und $\omega + d\omega$ rechnen.

* Das wäre ~~das~~ $\frac{1}{8}$ der Punkte in einer Δk -Schale eines Kugels mit Radius k .



$$\frac{1}{8} dn_1 dn_2 dn_3 = \frac{1}{8} \frac{4\pi k^2 dk}{(\pi/L)^3} = \frac{L^3}{2\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

(Gleichverteilungssatz der Klass. Phys.)

Jede stehende Welle entspricht ein Oszillator mit Energie $k_B T$ ($k_B \equiv$ Boltzmann-Konstante), also eine Energie pro Volumen $\frac{k_B T}{L^3}$

Also damit kriegen wir eine Energiedichte: außer Konstanten

$$u(\omega, T) d\omega \approx \frac{L^3}{2\pi^2 c^3} \omega^2 \frac{k_B T}{L^3} d\omega \rightarrow u(\omega, T) \sim \frac{k_B T}{c^3} \omega^2$$

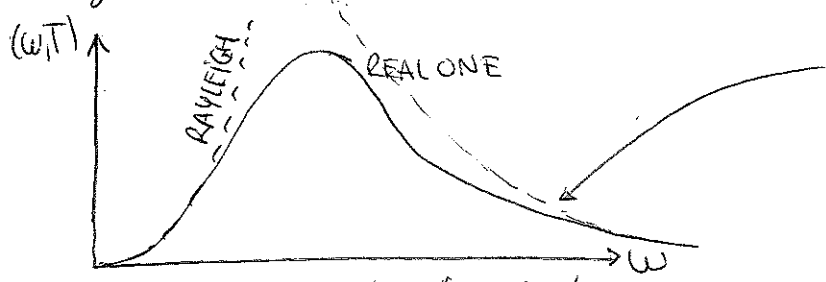
Also klassisch, geht die Energiedichte der Strahlung als $\sim \omega^2$.

Aber dies kann nicht sein!!!

Sonst: $\int_0^\infty u(\omega) d\omega = \infty \rightarrow$ Der schwarze Körper würde eine unendliche Energiemenge abstrahlen!! (Ultravioletkatastrophe)

Etwas stimmte nicht in der klassischen Rechnung, aber was?

* Eigentlich sieht die Energiedichte mehr so aus:



Hier zerfällt $u(\omega, T)$ exponentiell (Wien-Gesetz)

$$u(\omega, T) \sim e^{-\gamma \omega / T}$$

(wobei γ eine Konstante ist)

es gibt es keine Katastrophe!

In 1900 Max Planck fand eine (zuerst ganz empirische) Formel der thermischen Strahlung

Formel der thermischen Strahlung

$$u(\omega, T) \sim \frac{h}{c^3} \frac{\omega^3}{e^{h\omega/k_B T} - 1}$$

(wobei h eine Konstante ist)
 $h \approx 10^{-34} \text{ J/s}$

Diese Formel interpoliert zwischen Rayleigh- und Wien-Gesetz

* $h\omega \ll k_B T \rightarrow$ Rayleigh (weil $e^{h\omega/k_B T} \approx 1 + h\omega/k_B T$)

* $h\omega \gg k_B T \rightarrow$ Wien (weil $(e^{h\omega/k_B T} - 1)^{-1} \approx e^{-h\omega/k_B T}$)

Anders umgeschrieben:

$$u(\omega, T) \sim \frac{\omega^2}{c^3} k_B T \left(\frac{h\omega/k_B T}{e^{h\omega/k_B T} - 1} \right)$$

klassische das war ein 1
Klassische Gleichverteilungssatz

Also die Formel funktioniert ganz gut. Aber wieso?
Zwei Monate später (!!) fand Planck den Antwort.

Die Energie jeder Strahlungsmode variiert nicht kontinuierlich wie ein klassischer harmonischer Oszillator mit Durchschnitt T .
Diese Energie war ~~in~~ in "Päckchen" mit einer bestimmten ~~in~~

(frequenzabhängigen) Energie \rightarrow Die Quanta !!
ausgestrahlt \rightarrow

Sagen wir, daß für eine bestimmte ~~Energie~~ Frequenz ω , diese "Päckchen" eine Energie ϵ haben.

(Wir werden nun hier Ideen der statistischen Physik benutzen. Es ist nicht notwendig, daß ihr alles im Detail versteht, nur die Idee, daß die Quantisierung der Energie erklärt die Form der $u(\omega, T)$ Kurve).

Boltzmann Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(E) = \frac{e^{-E/k_B T}}{\sum_E e^{-E/k_B T}} \equiv \text{das gibt uns die Wahrscheinlichkeit die Mode } (\omega) \text{ mit Energie } (E) \text{ zu finden.}$$

Also die Gesamte Energie (für die Mode ω) ist:

$$\bar{E} = \sum_E E P(E)$$

Aber die Energie geht in Päckchen (ϵ): $E = n \epsilon$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon e^{-n\epsilon/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/k_B T}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\epsilon/k_B T})^n = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon/k_B T}} \quad (\text{eine geometrische Reihe})$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon e^{-n\epsilon/k_B T} &\stackrel{x = \epsilon/k_B T}{=} \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dx} e^{-nx} \right) = \\ &= -\epsilon \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = -\epsilon \frac{d}{dx} \frac{1}{(1 - e^{-x})} = \frac{\epsilon e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Also } \bar{E} = \frac{\frac{\epsilon e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}}{\frac{1}{(1 - e^{-x})}} = \frac{\epsilon}{e^x - 1} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/k_B T} - 1}$$

• Das gibt uns eine Formel wie die empirische Formel,
wenn $E = h\nu$.

Also, die Strahlung einer bestimmten Frequenz wird in
Quanta mit Energie $h\nu$ ausgestrahlt.

• Also die Elektromagnetische Strahlung wird in "Teilchen"
ausgestrahlt!!

Wir "fühlen" nicht die Licht als eine Sammlung von Teilchen,
weil die Energie pro Quanten typischerweise sehr sehr klein ist.
• gibt also viele viele Quanta (die Quanta von Licht heißen
Photonen) in der Strahlung einer Glühbirne.

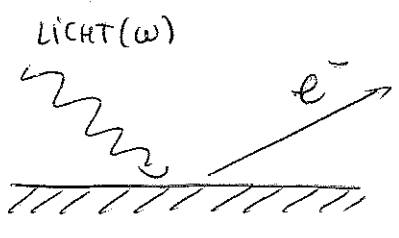
Aber diese Idee von Planck hat ~~die~~ eine Revolution aufgelöst.
Die Quantenrevolution!

• Der photoelektrische Effekt

• ganz am Anfang hat ~~die~~ die Leute echt Probleme gehabt, die
Idee Plancks zu akzeptieren.

Eine ganz wichtige Mitwirkung am Anfang der Quantenphysik
kam ¹⁹⁰⁵ von (wem sonst?) Einstein, und zwar die Erklärung
des sogen. photoelektrische Effekt, die noch ein Beweis für
die Teilchennatur der Strahlung geliefert hat.

Der photoelektrische Effekt besteht darin, daß durch Licht Elektronen aus einer Metalloberfläche herausgelöst werden (Hertz, 1887)



• Nicht alle Frequenzen (ω) werden Elektronen aus der Oberfläche herausgelöst.

Nur für ω größer als eine kritische Frequenz, die Metallabhängig ist.

Die Energie der ausgelösten Elektronen ist unabhängig von der Intensität der Strahlung, und hängt linear von der Frequenz ω ab.

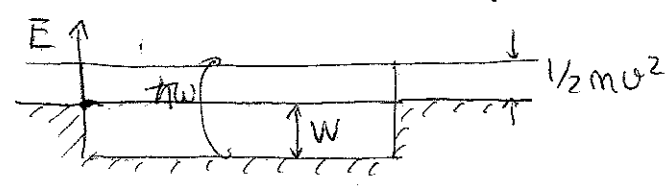
Im Prinzip kann man die Existenz des photoel. Effekts innerhalb der klassischen Theorie des Elektromagnetismus verstehen. Die Elektronen (und damals in 1905 waren die Elektronen schon bekannt) können durch die Lichtabsorption beschleunigt werden. Aber die Energie der elektromagnetischen Welle hängt von der Energie der Quelle^{ab} und nicht von der Frequenz.

Außerdem die klassische Erklärung verlangt eine minimale Zeit zwischen dem Ankommen der Strahlung und die Auslösung des Elektronen (die Energie wird absorbiert in dieser Zeit). Diese Zeit sollte in Prinzip abhängig von der Intensität der Strahlung. Aber so was wurde nicht beobachtet!!

Und nun kommt die ¹⁹⁰⁵ Erklärung von Einstein. Die Strahlung besteht aus Quanta (Photonen) von Energie $h\omega$. Der Elektron absorbiert ein Photon. Ein Teil dieser Energie wird benutzt, um den Elektron aus der Oberfläche herauszulösen. Die Energie (ω) variiert von ^{ein} Metal zu anderen.

Die Extraenergie geht in die kinetische Energie des Elektrons:

$$\frac{1}{2} m v^2 = h\nu - W$$



Das erklärt alles!

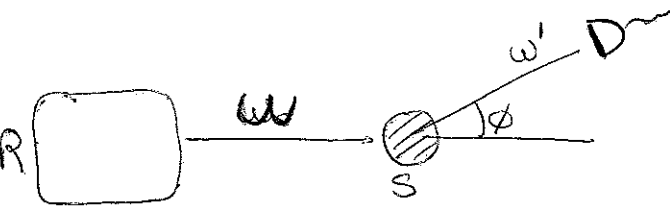
- $h\nu > W$ um Elektronen herauszulösen → Die Schwelle.
- Die kinetische Energie der herausgelösten Elektronen geht mit v (Mess).

Dies war noch ein Beweis der Teilchenatur der Strahlung.
(Einstein, Nobelpreis 1921)

COMPTON-EFFEKT

Ein eindeutiger Beweis der Teilchenatur der Strahlung fehlte bis zur Entdeckung des Compton-Effektes (Compton, 1922).

Compton untersuchte die Streuung von Röntgenstrahlen an verschiedenen Elementen (Graphit), bei denen die Elektronen sehr locker gebunden, praktisch frei sind.



Dazu strahlte er paralleles Röntgenlicht aus einer Quelle (R) der Frequenz ω auf den Streukörper (S)

und untersuchte die Abhängigkeit von Streuwinkel die Intensität (I) und Frequenz (ω') des gestreuten Lichts.

Er fand, daß I und ω' abhängig von ϕ waren. Dies widersprach den klassischen Erwartungen (I und ω unabhängig von ϕ).

Compton erklärt dies mit der Idee von Photonen.

Ein Photon der Quelle mit Frequenz ω , also Impuls $p = \hbar\omega/c$ ($p = \hbar k, k = \omega/c$) [Note: die Energie des Photons ist $E = pc$ (relativistisch)]

stößt gegen ein Elektron (das vor dem Stoß null Impuls hat).

Nur betrachten den Stoß als elastisch, also Energie und Impuls müssen erhalten werden.

Sei $\vec{p}' \equiv$ Impuls des Photons nach dem Stoß.

$\vec{P} \equiv$ Impuls des Elektrons nach dem Stoß.

Also: * Impulserhaltung: $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{P}$

* Energieerhaltung: $\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + [m^2c^4 + P^2c^2]^{1/2}$
 Photon (aus der Quelle) Ruheenergie des Elektrons Photon (nach dem Stoß) Relativistische Energie des Elektrons.

Also $\vec{P} = \vec{p} - \vec{p}' \rightarrow P^2 = p^2 + p'^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{p}'$

~~$m^2c^4 + P^2c^2 = [\hbar(\omega - \omega') + mc^2]^2 = m^2c^4 + \hbar^2(\omega - \omega')^2 + 2\hbar mc^2(\omega - \omega')$~~

Da $|\vec{p}| = \hbar\omega/c$; $|\vec{p}'| = \hbar\omega'/c$

$P^2 = (\frac{\hbar\omega}{c})^2 + (\frac{\hbar\omega'}{c})^2 - 2(\frac{\hbar\omega}{c})(\frac{\hbar\omega'}{c}) \cos \phi$

also $P^2c^2 = \hbar^2(\omega - \omega')^2 + 2\hbar^2\omega\omega'(1 - \cos \phi)$

aber auch $P^2c^2 = \hbar^2(\omega - \omega')^2 + 2\hbar mc^2(\omega - \omega')$

Also $\hbar\omega\omega'(1 - \cos \phi) = mc^2(\omega - \omega') \rightarrow \hbar(1 - \cos \phi) = mc^2(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega})$

Da $\omega = 2\pi/\lambda \rightarrow (\lambda \equiv \text{Wellenlänge})$

$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \phi)$

Compton-Wellenlänge.

Und das nur genau die Abhängigkeit die er gefunden hat.

(Nobelpreis 1927 deswegen!)

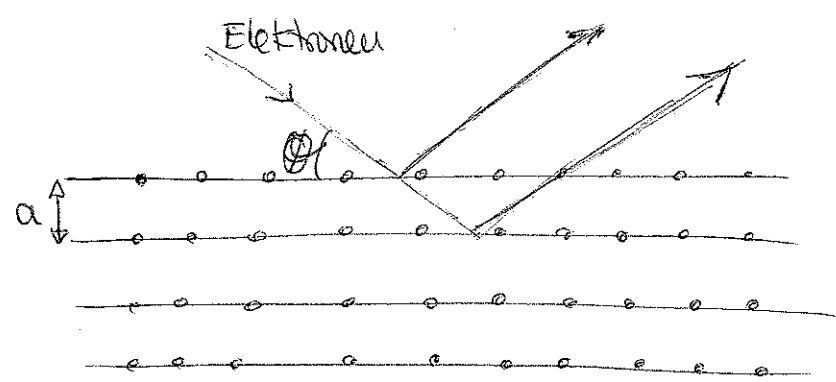
MATERIENWELLEN

Wir haben schon gesehen, daß die Strahlung eine doppelte Natur als Teilchen und Welle hat.

1923 schlugte De Broglie vor, daß ebenfalls die Materie eine doppelte Natur hat, also die Materie muß ebenfalls (unter geeignete Bedingungen) sich als eine Welle verhalten.

Er schlugte vor, daß für ein Impuls p gibt es eine assoziierte Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi h}{p} \Rightarrow$ De Broglie-Wellenlänge.

1927 wurde diese Idee von Danissou und Geger experimentell beobachtet, und zwar in Experimenten von Streuung von Elektronen an einer Kristalloberfläche.



(mit einer Wellenlänge λ)

Man betrachtet die Elektronen als Wellen, dann gibt es eine Phasenverschiebung zwischen Wellen reflektiert an verschiedenen Ebenen: $\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2a \sin\theta$. Wenn diese Phasenverschiebung $n \cdot 2\pi$ ist, dann interferieren die Wellen konstruktiv.

Das passiert für $\lambda = \frac{2a \sin\theta}{n}$

Also diese Wellenlängen werden verstärkt.

So was würde mit Elektronen 1927 von Danissou und Geger experimentell beobachtet.

Später gab es auch Neutron-Wellen-Experimenten (Wollan, 1945)⁽¹⁰⁾
und später auch mit Atomen (80° und 90°) und sogar
Molekülen (2000°).

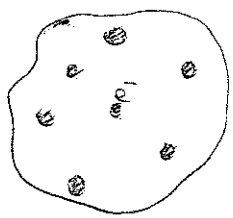
Aber in einer makroskopischen Skala sind die Welleneffekte
unbeobachtbar. Z.B. ein Teilchen von 1 mg (10^{-6} kg) mit
einer Geschwindigkeit von 10 cm/s ($10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{s}}$) ergibt ein
Impuls $p = mv = 10^{-7} \text{ kgm/s}$; also $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = 6,6 \times 10^{-25} \text{ cm}$
Der Radius eines Protons ist etwa 10^{-14} cm . Also λ ist
natürlich unobservierbar.

Note: natürlich alles kommt, weil \hbar so klein ist).

DAS ATOMMODELL VON BOHR

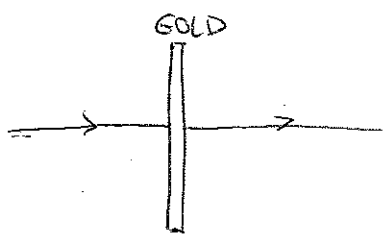
~~1900 Geiger und Marsden~~

Am Ende des 19. Jahrhunderts hatte Thomson ein Atommodell
vorgeschlagen, bei dem die gesamte positive Ladung gleichmäßig
über das ganze Atom verteilt waren, während die Elektronen
im Atom wie Rosinen in einem Kucken eingebettet waren.

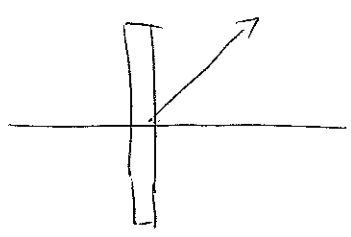


← Das Thomson-Modell des Atoms.

1910 widerlegte Ernst Rutherford dieses Atommodell (zusammen
mit Geiger und Marsden) mehr oder weniger durch Zufall
während eine Messung der Streuung von α -Strahlen (α Teilchen
sind eigentlich Heliumkernen) an extrem dünnen Metallplatten.



← Normalerweise gingen die α -Teilchen einfach durch (ohne Streuung).

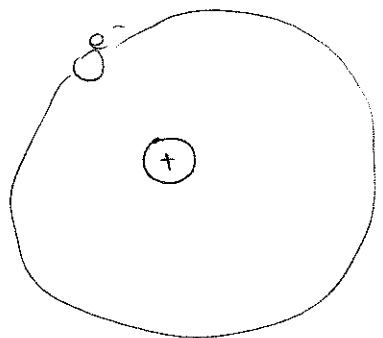


• Aber als man zu gab es α -Teilchen, die in großen Winkeln gestreut wurden. (manchmal sogar rückwärts!)

• Mardsen (damals ganz jung, 20!) kam zu dem Schluß, daß nur eines von 10^8 Teilchen einer Weitwinkelstreuung unterliegt.

Wieso? Welches α -Teilchen reflektiert wird, unterliegt dem Zufall. Es geschieht jedoch aufgrund einer Kollision mit einem sehr dichten, positiv geladenen Teilchen. Da nur ~~aus~~ eines von 10^8 α -Teilchen dieser Kollision unterliegt, muß der größte Teil der Masse eines Atoms leerer Raum sein!! Der größte Teil der Masse eines Atoms ist in einem sehr kleinen positiv geladenen Kern konzentriert \Rightarrow dem Nucleus.

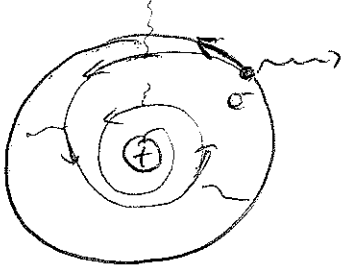
Der Nucleus ist ungefähr 10^{-8} kleiner als der Atom. hätte ein Atom die Größe der Erde, so müßte sein Nucleus so groß wie eine Kugel mit einem Radius von 6 m. Fant unglaublich, oder?



← das Rutherford-Modell
des Atoms

Die Elektronen sind durch die Coulomb-Kraft vom Nucleus angezogen, und laufen in Bahnen herum (wie Planeten um einer Sonne)

Aber dies Modell hatte (klassisch betrachtet) Probleme.
 Nach der klassischen Elektrodynamik müsste ein Elektron, das um den Atomkern kreist und somit eine Zentrifugalbeschleunigung erfährt, als beschleunigte Ladung kontinuierlich elektromagnetische Wellen aussenden, und daher wegen des Energieverlustes nach kurzer Zeit in den Kern stürzen.



Die Erklärung von Bohr (1913) war folgende. Das Elektron kann jedoch nicht nur als Teilchen ~~er~~ aufgefasst werden, sondern auch als Materiewelle (De-Broglie-Welle). Damit sich diese Materiewelle nicht auslöscht, muss der Umfang der Elektronenbahn ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge sein:

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{2\pi\hbar}{p} \rightarrow pr = n\hbar \equiv \text{Drehimpuls}$$

⇒ Also der Drehimpuls muss ein ganzzahliges Vielfaches der Planck-Konstante \hbar .

Diese Bahnen sind stabil, also die Strahlen nicht.
 Also der Radius der Elektronenbahn ändert sich nicht kontinuierlich (wie die klassische Physik sagte), sondern sprunghaft. Die Energie ändert sich also auch sprunghaft wenn ein Elektron springt $E_{n_1} \rightarrow E_{n_2}$. Wenn $E_{n_1} > E_{n_2}$ ist, dann ergibt dieser Sprung ein Photon mit Frequenz

$$\omega = (E_{n_1} - E_{n_2}) / \hbar$$

Das erklärte auch die Spektroskopische Linien, die man im 19. ⁽¹³⁾ Jahrhundert beobachtet hatte, und man klassisch nicht erklären konnte.

Also Wellen zeigen Teilchen-Effekte, und umgekehrt Teilchen zeigen Wellen-Effekte. Und eine ganz neue Physik wird verfaßt \rightarrow die Quantenphysik.

* CRASH-KURS "FOURIER TRANSFORMATION"

* Man definiert die Fourier-Transformation $F(k)$ von $f(x)$

als:
$$F(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

Eigentlich manchmal wird ohne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ definiert; es ist eigentlich nicht so wichtig, aber man muss sich konsequent an der Definition halten

Umgekehrt

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dx \quad \leftarrow \text{Inverse Fourier Transformation.}$$

Beispiel (wichtig!)

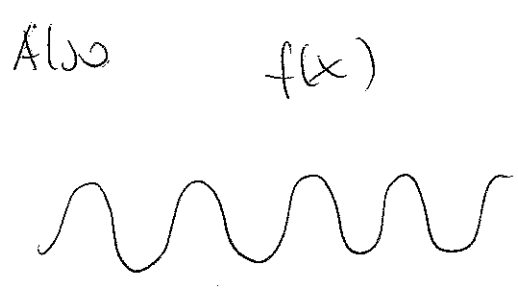
$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$$

Also wie ist die Fourier-Transform von $f(x) = \cos qx$?

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos qx e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [e^{iqx} + e^{-iqx}] e^{ikx} dx$$

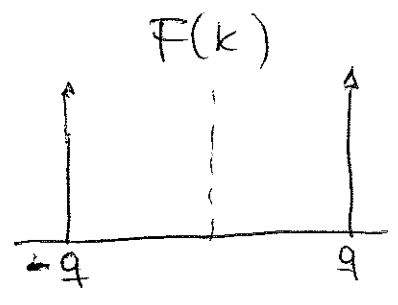
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(k+q)} dx + \frac{\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(k-q)} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \pi [\delta(k+q) + \delta(k-q)] \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(k+q) + \delta(k-q)]$$



FOURIER-
TRANSF.

→



• WELLENPAKETTEN UND DIE UNSCHÄRFERELATIONEN

Wir haben gesehen, daß die Natur eine Dualität Teilchen-Welle zeigt.

Es ist schwer zu denken, wie man mit Teilchen Wellen simulieren könnte. Aber umgekehrt ist es einfacher, wir können mit Wellen etwa "Teilchen" simulieren. Das bringt uns zu die Idee von Wellenpaketen

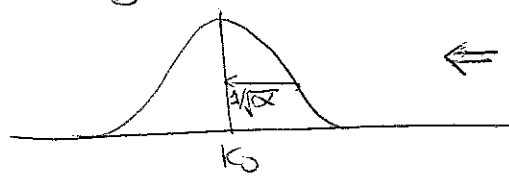
Wellenpaketen

Ein Wellenpaket ist eine Superposition von Wellen verschiedener Frequenzen, in solcher Weise, daß die Wellen interferieren mit einander fast vollständig destruktiv ausserhalb einem bestimmten räumlichen Bereich.

Sehen wir ein Beispiel. Nehmen wir die Funktion:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ikx} \quad (\text{Fourier-Transform})$$

wobei $g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ \Leftrightarrow Also $g(k)$ ist eine gaußsche Funktion \leftarrow Funktion im Impuls-Raum



Also $\Psi(x)$ ist die Fourier-Transform einer gaußschen Funktion:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0x} e^{-x^2/4\alpha}$$

Also $|\Psi(x)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{-x^2/2\alpha} \iff |g(k)|^2 = e^{-2\alpha(k-k_0)^2}$

• Also: $|\Psi(x)|^2 \rightarrow$ Funktion lokalisiert um $x=0$ mit Breite $2\sqrt{2\alpha}$ (Ortsraum)

$|g(k)|^2 \rightarrow$ Funktion lokalisiert um $k=k_0$ mit Breite $\frac{2}{\sqrt{2\alpha}}$ (Impulsraum)

* Und muß genau genau aufpassen.

* Die x -Breite (Δx) geht invers wie die k -Breite (Δk) .

Also ein Wellenpaket sehr lokalisiert in x wird sehr delokalisiert in k , und umgekehrt.

$$* \Delta k \cdot \Delta x \sim 4 \sim \Theta(1) \text{ (Konstant)}$$

Also ~~es~~ ist prinzipiell unmöglich beide Δx und Δk klein zu machen. Das ist eine allgemeine Eigenschaft der Fourier-Transformation die weitgehende Folgen in der Quantenphysik hat! Das bringt uns direkt an die Heisenberg Unschärferelationen (mehr später).

Aber zuerst werden wir untersuchen wie ein Wellenpaket sich in der Zeit entwickelt. Diese Untersuchung wird uns zu die Schrödinger-Gleichung bringen (eine der wichtigsten Gleichung der Quantenphysik!)

Wir müssen zuerst überlegen, wie die individuelle Ebenwellen ^{sich} propagieren.

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ikx - i\omega t} = e^{i2\pi \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{\omega}{2\pi} t \right]}$$

Für Photonen (in Vakuum) kennen wir schon, daß $E = \hbar\omega = pc = \hbar kc$ also $\omega = kc = 2\pi \frac{c}{\lambda}$

$$\text{Also } ~~e^{ikx}~~ e^{ikx} \longrightarrow e^{ik(x-ct)}$$

$$\text{und } \psi(x) \longrightarrow \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{ik(x-ct)} = f(x-ct)$$

Also die Form ändert sich nicht in der Zeit. Also ein Wellenpaket am Licht propagiert ohne Störung mit Lichtgeschwindigkeit.

* Also:

* Das Paket bewegt sich mit Geschwindigkeit v_g

* Die Breite $\alpha \rightarrow \alpha + \beta^{3/2} \alpha$

Das Wellenpaket ~~breitet~~ ^{breitet} sich aus \rightarrow Quanten Dispersion

Wenn das Wellenpaket ein Teilchen repräsentieren muß,

$$\left. \begin{aligned} \text{dann muß } v_g &= P/m \\ E &= P^2/2m \end{aligned} \right\} \text{ also } \omega = \frac{p^2}{2m\hbar}$$

aber $E = \hbar\omega$ (Plancksches Gesetz)

Da $v_g = \frac{d\omega}{dk} \rightarrow p$ muss $\hbar k$ sein.

[das ist noch mal de Broglie's Idee $\rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} \rightarrow \lambda = \hbar/p$]

$$\text{Also } \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{i(px - Et)/\hbar} \quad g(k) \rightarrow \phi(p)$$

und:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) \hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i(px - Et)/\hbar} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) \frac{p^2}{2m} e^{i(px - Et)/\hbar} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{i(px - Et)/\hbar} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) \end{aligned}$$

Also $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$ \rightarrow Das ist die Schrödinger-Gleichung für Teilchen ohne externer Potentiale.

Mehr (viel mehr) über die Schrödinger-Gleichung später...

Aber für Teilchen mit Masse $\omega(k) \neq kc$. Wir haben

also: $\Psi(x,t) = \int dk g(k) e^{ikx - i\omega(k)t}$

Um die Rechnungen einfacher zu machen, nehmen wir $g(k)$ sehr lokalisiert um $k=k_0$.

In der Nähe von $k=k_0$ können wir $\omega(k)$ Taylor-Entwickeln:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + (k-k_0) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} + \frac{1}{2} (k-k_0)^2 \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0} + \dots$$

Dann:

$$\Psi(x,t) \approx \int dk g(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k_0)t} e^{-i(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}t} e^{-\frac{i}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0}t}$$

$$\stackrel{k=k_0}{=} e^{ik_0x} e^{-i\omega(k_0)t} \int dk' e^{-\alpha k'^2} e^{-i\frac{k'^2}{2}\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0}t} e^{ik' \left[x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}t \right]}$$

Sei $v_g \equiv \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$ ← Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaket

Sei $\beta \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0}$

Also:

$$\Psi(x,t) = e^{i[k_0x - \omega(k_0)t]} \int dk' e^{ik'(x-v_g t)} e^{-(\alpha + i\beta t)k'^2}$$

Man sieht ganz klar, daß $f(x,t)$ sieht fast genauso aus als $f(x)$,

aber nun $x \rightarrow x - v_g t$
 $\alpha \rightarrow \alpha + i\beta t$

$$\Psi(x,t) = e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)} \left(\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}\right)^{1/2} e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{2(\alpha + i\beta t)}}$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}(x-v_g t)^2}$$

DIE UNSCHÄRFERELATIONEN UND IHREN FOLGEN

Wir haben vorher etwas sehr wichtiges gesehen:

$$\Delta k \cdot \Delta x \approx 1$$

Da $h k = p \rightarrow \boxed{\Delta p \Delta x \approx h}$

Wenn wir stark in x lokalisieren, dann wir den Impuls sehr unlokalisiert, und umgekehrt. Wir können nicht beide mit große Genauigkeit bestimmen, in klarer Widerspruch mit der klassische Physik

Note: Natürlich, da h so klein ist, ist die klassische Physik typischerweise o.k. in der makroskopischen Welt).

Die Unschärferelationen tauchen überall in der Quantenwelt, und haben viele Folgen. Sehen wir ein Paar Beispiele (Gedankenexperimenten)

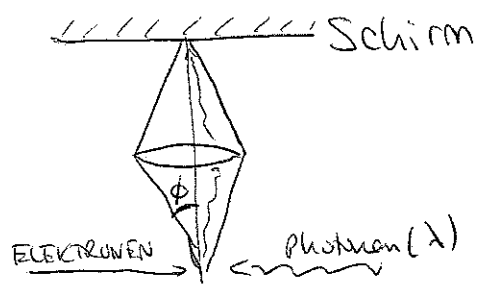
2) Das Heisenberg-Mikroskop

Wir wollen die Position eines Elektrons bestimmen. Sagen wir, daß N Elektronen in einem Strahl mit Impuls p_x sind. Wir senden N Photonen entlang $(-x)$ -Richtung. Es gibt eine Streuung zwischen ein Elektron und ein Photon. Der gestreute Photon geht durch ein Mikroskop bis an dem ~~Bildschirm~~ Bildschirm, wo detektiert wird.

Das Auflösungsvermögen des Mikroskops (Optik) geht wie $(\lambda \equiv \text{Wellenlänge des Photons})$

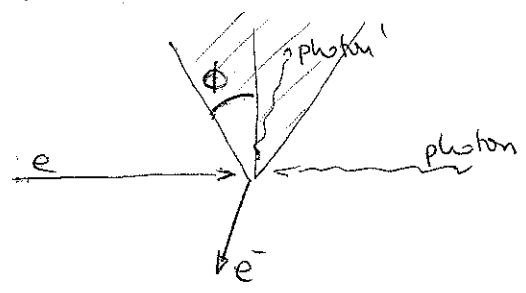
$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \phi}$$

• Je kleiner λ (und größer $\sin \phi$) desto besser Auflösungsvermögen.



~~• Aber nach der Streuung ändert die Richtung der Photons~~

Der detektierte Photon konnte nach der Streuung eine Richtung genommen haben, die innerhalb des Winkels ϕ ist.



• Der Rückstoß ist also nicht genau bestimmt, und deswegen $\Delta p_x \sim 2 \frac{h\nu}{c} \sin \phi$ (Ich erinnere euch den Compton-Effekt)

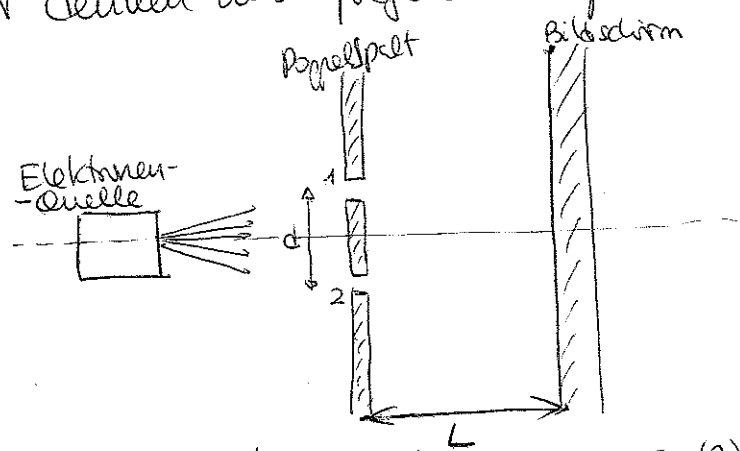
Also $\Delta x \Delta p_x \sim 2 \frac{h\nu}{c} \sin \phi \frac{\lambda}{\sin \phi} \sim 4h\nu \lambda$

Also Position und Impuls können nicht gleichzeitig bestimmt werden.

> Doppelspaltexperiment

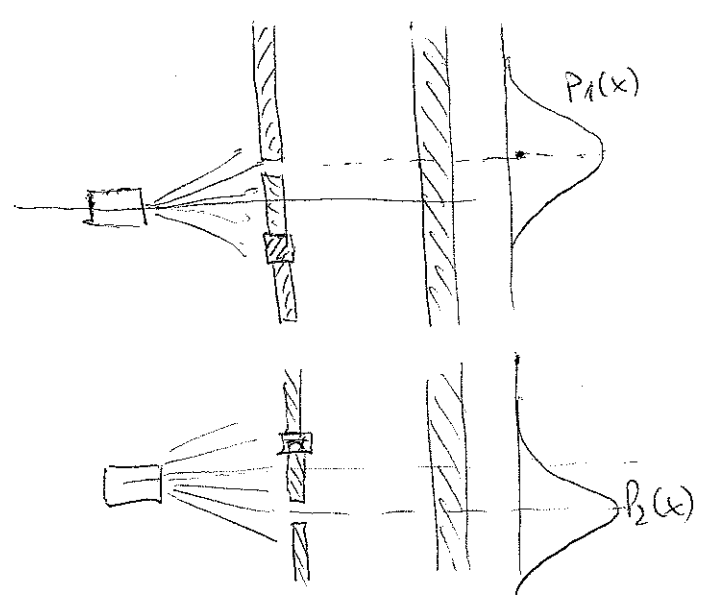
Vielleicht eine der wichtigsten gedanklichen Experimenten (und auch reale Experimenten) der Quantenphysik ist das sogen. Doppelspaltexperiment.

Wir denken uns folgende experimentelle Anordnung:



* Wir schießen Elektronen durch einem Doppelspalt an dem Bildschirm, wo die Detektoren werden.

Was passiert zuerst wenn wir (2) blockieren?

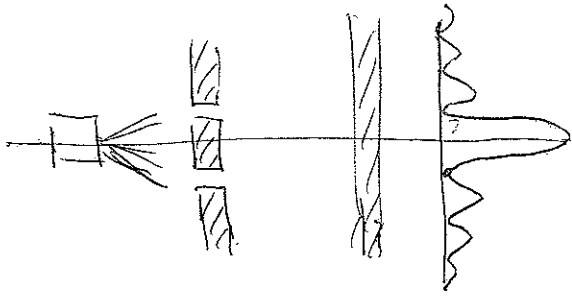


* Erwartungsgemäß findet man Streuung um die mittlere Position (direkt gegenüber des Spaltes) Das ist klassisch verständbar.

* Ähnlich wenn wir (1) blockieren? (Verteilung $P_2(x)$)

Was passiert wenn beide Löcher geöffnet bleiben?

Klassisch sollte man $P_1(x) \rightarrow P_2(x)$, aber was man eigentlich Unregt, ist ein Interferenzmuster!



- Eine Deutung ist klassisch unmöglich
- Man erhält Interferenzbilder wie in der Optik.

Verringert man den Strom einfallender Elektronen, kann man Elektronen für Elektronen einzeln verschicken. Trotzdem bauen die detektierten Teilchen ein Interferenzbild auf!

Sagen wir, daß für jedes registrierte Teilchen könnten wir sagen, durch welche Öffnung es gekommen ist. Man registriert deswegen 2 Gruppen von Ereignissen:

$P_1'(x)$ durch Öffnung 1

$P_2'(x)$ durch Öffnung 2.

↓ Welcherweg - Information

Dabei sind $P_1'(x)$ und $P_2'(x)$ wie die mit blockierten Öffnungen. Aber man verliert hier den Interferenzmuster! Man bekommt einfach $P_1'(x) + P_2'(x)$. Die Beobachtung des Versuchesablaufs stellt demnach einen Eingriff in das physikalische System dar und beeinflusst das Versuchsergebnis.

• Diese Welcher-Weg-Ergebnisse können mit Hilfe der Unschärfenrelationen verstanden werden.

Wir kennen schon, daß für ein Impuls p haben wir eine Wellenlänge $\lambda = 2\pi\hbar/p$ (de Broglie)

• Aus der Optik kennt man, daß wenn ~~man~~ ^{eine Welle} einer Wellenlänge λ durch die 2 Öffnungen geht, knegt man ein Interferenzmuster auf dem Bildschirm. Die Maxima des Musters haben ein Abstand zwischeneinander $\frac{\lambda}{d}$ (siehe erste Abbildung).

Sagen wir nun, daß wir bestimmen durch welche Öffnung der Elektron durchgegangen ist. Also $\Delta y < \frac{d}{2}$ für die Ungenauigkeit der Stelle des Elektrons.

• Wenn wir sozusagen machen, dann bekommt der Elektron eine Ungenauigkeit $\Delta p_y > 2\hbar/d$ (Unschärferelation)

$$\text{Also } \frac{\Delta p_y}{p} \geq \frac{2\hbar/d}{p} = 2 \frac{\lambda}{d}$$

Diese Ungenauigkeit bestimmt eine Ungenauigkeit in der Position des Elektrons auf dem Bildschirm $\sim 2\lambda \frac{\lambda}{d}$ (mindestens)

Also das Interferenzmuster wird damit zerstört!

c) ENERGIE-ZEIT UNSCHÄRFERELATION

• Wir wissen schon, daß

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

$$\text{Also } \left(\frac{p \Delta p}{m}\right) \cdot \left(\frac{m \Delta x}{p}\right) \geq \hbar$$

↑ Energie ↑ Zeit

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar}$$

Das ist auch klar, weil Zeit und Frequenz (also Energie) sind durch eine Fouriertransformation verknüpft.

• DIE SCHRÖDINGER - GLEICHUNG

Aus unserer Diskussion über die Wellenpakete haben wir gesehen, daß die Funktion $\psi(x,t)$ des Wellenpakets erfüllt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$$

Diese Gleichung beschreibt ein Teilchen im freien Raum (ohne externe Potentialien).

Diese Gleichung ist 1. Ordnung in t . Also wenn wir $\psi(x,t=0)$ kennen, dann können wir $\psi(x,t)$ für alle andere t .

Die Funktion $\psi(x,t)$ ist stetig, und außerdem

- (1) $\psi(x,t)$ ist komplex \Leftarrow das ist aber sehr wichtig!
- (2) $|\psi(x,t)|$ ist groß, wo das Teilchen am wahrscheinlichsten ist (Zentrum des Wellenpakets)

~~Wegen (1) können wir~~

Wegen (2) können wir

$$P(x,t) dx = |\psi(x,t)|^2 dx$$

vorstellen, als die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zwischen x und $x+dx$ zu finden.

Das ist die sogen. statistische Interpretation der Wellenfunktion (Max Born).

Diese Wahrscheinlichkeit ist reell, und ist groß wo das Teilchen vermütlich sein soll.

Außerdem, $P(x,t)$ muß normalisiert werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Das heißt einfach, daß das Teilchen muß irgendwo sein!}$$

$|\psi(x,t)|^2$ ist die physikalisch bedeutende Größe, aber das heißt überhaupt nicht, daß die Tatsache, daß $\psi(x,t)$ komplex ist, nicht wichtig ist.

$\psi(x,t) \Rightarrow$ ist komplex.

Also $\psi(x,t) = |\psi(x,t)| e^{i\phi(x,t)}$ (Polarbeschreibung der komplexen Zahlen)

↑ Amplitude

↑ Phase

Die Phase ist aber sehr wichtig. Sehen wir nun warum.

Nehmen wir 2 Lösungen $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ von

der Gleichung $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$

(mehr über lineare Operatoren später)

Diese Gleichung ist linear, also alle Linearkombinationen

$$\psi(x,t) = \alpha_1 \psi_1(x,t) + \alpha_2 \psi_2(x,t)$$

ist auch eine Lösung der Gleichung. Nehmen wir $\alpha_{1,2}$ als reell.

Dann $|\psi(x,t)|^2 = |\alpha_1 \psi_1(x,t) + \alpha_2 \psi_2(x,t)|^2$

$\psi_1^* \Rightarrow$ komplex konjugiert

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha_1 \psi_1^* + \alpha_2 \psi_2^*) (\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2) \\
 &= \alpha_1^2 |\psi_1|^2 + \alpha_2^2 |\psi_2|^2 + \alpha_1 \alpha_2 (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) \\
 &= \alpha_1^2 |\psi_1|^2 + \alpha_2^2 |\psi_2|^2 + \alpha_1 \alpha_2 |\psi_1| |\psi_2| (e^{i[\phi_2 - \phi_1]} + e^{-i[\phi_2 - \phi_1]}) \\
 &= \alpha_1^2 |\psi_1|^2 + \alpha_2^2 |\psi_2|^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 |\psi_1| |\psi_2| \cos(\phi_2 - \phi_1)
 \end{aligned}$$

Also die Phasen sind ganz wichtig. Eigentlich die erklären fastisch unverständlichen Effekte, wie die Interferenz-Experimenten (Doppelspaltexperiment).

Viele der "kernischen" Effekte der Quantenmechanik haben der Ursprung in der Idee der Phase!

• Also, wir haben gesehen, daß ein Teilchen in freiem Raum
löst die Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$$

Wenn es ein externes Potential $V(x)$ gibt, dann wird die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + V(x) \psi(x,t)$$

In Allgemeinen, in 3 Dimensionen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r},t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r},t)$$

Wenn wir $\psi(x,t)$ kennen, dann kennen wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$, und damit den Erwartungswert für alle
Funktion $f(x)$:

$$\langle f(x) \rangle = \int dx f(x) |\psi(x,t)|^2 = \int dx \psi^*(x,t) f(x) \psi(x,t)$$

Die Idee von Erwartungswert ist sehr wichtig, da sind diese
Erwartungswerte, was wir höchstwahrscheinlich im Experiment
beobachten werden.

Die Idee von Erwartungswert erlaubt uns auch die Idee
im Impulsoperator einzuführen.

classisch $p = mv = m \frac{dx}{dt}$

also ist es natürlich zu definieren (quantenmechanisch)

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = m \frac{d}{dt} \int dx \psi^*(x,t) x \psi(x,t) \\ &= m \int dx \left[\frac{d\psi^*(x,t)}{dt} x \psi(x,t) + \psi^*(x,t) x \frac{d\psi(x,t)}{dt} \right] \end{aligned}$$

Note: Die erwartete "Menge" die in Zeit sich ändert ist $\langle x \rangle$, und diese Änderung bringt die Änderung um $\langle x \rangle$, und damit bringt zu $\langle p \rangle$.

Da (für $V(x)=0$): $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$

und (Komplex-Konjugiert): $-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^*$

Dann:

$$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \times \psi - \psi^* \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]$$

Nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \times \psi &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \psi \right) - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \psi - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \psi \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* \psi) + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \times \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi^* \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \times \psi - \psi^* \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \psi - \psi^* \times \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \psi \right] + 2\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Heute

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \times \psi - \psi^* \times \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \psi \right] \quad \rightarrow \text{die Funktion } \psi(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \\ &\quad + \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \end{aligned}$$

Also

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x,t)^* \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(x,t)$$

Das zeigt uns etwas wichtiges. Wir können ein Operator

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

definieren ("^" bedeutet Operator, mehr über Operatoren gleich).

Und ganz klar: $\langle p \rangle = \langle \hat{p} \rangle$.

Also, nun kennen wir schon die Darstellung des Impulsoperators in Ortsdarstellung (also \hat{p} als Funktion von x , oder besser gesagt, als Funktion von $\partial/\partial x$).

Wir können auch in Impulsdarstellung arbeiten. Sehen wir das.

Wir haben schon gesehen daß

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \phi(p) e^{ipx/\hbar}$$

Wir können die Fouriers-Transform invertieren

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \psi(x) e^{-ipx/\hbar}$$

Man kann ganz einfach beweisen, daß:

$$\int dp |\phi(p)|^2 = \int dx |\psi(x)|^2 = 1 \quad (\text{Parseval's Theorem})$$

Also wenn $\psi(x)$ normiert ist, so ist auch $\phi(p)$.

Außerdem:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int dx \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = \\ &= \int dx \psi^*(x) [-i\hbar] \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} \phi(p) e^{ipx/\hbar} \\ &= \int dp \phi(p) p \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \psi^*(x) e^{ipx/\hbar} = \int dp \phi(p) p \phi(p)^* \\ &= \int dp p |\phi(p)|^2 \end{aligned}$$

Das sagt uns das:

- $\Phi(p) \Rightarrow$ ist die Wellenfunktion in Impulsdarstellung
- $|\Phi(p)|^2 \Rightarrow$ gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte um ein Teilchen mit Impuls p zu finden.

Aus der Definition kann man ganz einfach beweisen, dass

$$\langle x \rangle = \int dp \Phi^*(p,t) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right] \Phi(p,t)$$

und also: $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \rightarrow$ Ortoperator in Impulsdarstellung

Also \hat{p} ist kein Nummer in Ortsdarstellung (oder \hat{x} in Impulsdarstellung) sondern ein Operator. Eigentlich Operatoren spielen eine sehr sehr wichtige Rolle in der Quantenmechanik.

In Gegenteil zu normalen Zahlen ist der Produkt von Operatoren (in allgemeinem) nicht kommutativ. Also, gegeben 2 Operatoren \hat{A} und \hat{B} , $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Wir können den Kommutator 2 Operatoren so definieren

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Kommutator spielen eine entscheidende Rolle in der Quantenmechanik (wir werden die mehrmals treffen!)

zum Beispiel:

$$\text{Sei } \hat{A} = \hat{x}$$

$$\hat{B} = \hat{p} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{A}\hat{B}\psi(x,t) = x \left(it\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x,t) = it\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$\hat{B}\hat{A}\psi(x,t) = -it\hbar \frac{\partial}{\partial x} [x\psi] = \cancel{-it\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi} - it\hbar \psi \rightarrow it\hbar x \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$\text{Also } [\hat{x}, \hat{p}]\psi = it\hbar \psi \rightarrow \boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = it\hbar}$$

Wir werden später sehen, daß diese Nicht-Kommutativität unter den Heisenbergschen Unschärferelationen steht.

Wir haben also gesehen, daß

$$\hat{p} = -it\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{Also } \hat{p}^2 \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi$$

Damit wird die Schrödinger-Gleichung:

$$\boxed{it\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right] \psi(x,t)}$$

→ Dieser Operator heißt Hamilton-Operator (or Energie-Operator)

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})}$$

weil \hat{H} ist die ~~klassische~~ quantenmechanische Version der klassischen Hamiltonfunktion