

DAS REALE WASSERSTOFFATOM

• Unsere Diskussion des Wasserstoffatoms war auf den Hamilton-Operator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{ze^2}{r}$$

aufgebaut. Wir wollen nun eine realistischere Beschreibung des Wasserstoffatoms erreichen, und dafür müssen wir an \hat{H}_0 einige Korrekturen anbringen.

RELATIVISTISCHE KORREKTUREN

• Zunächst ändert sich der Ausdruck der kinetischen Energie des Elektrons, wenn man relativistische Korrekturen berücksichtigt.

• Die gesamte kinetische Energie für das System Elektron-Proton ist: $\frac{p_e^2}{2m} + \frac{p_p^2}{2M}$ (nicht relativistisch).

Aber relativistisch: $\frac{p_e^2}{2m} \rightarrow (p_e^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} \approx$

$$\approx mc^2 + \frac{p_e^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{(p^2)^2}{m^3 c^2} + \dots$$

Der erste Term, mc^2 , ist irrelevant (einfach eine Konstante).

Also nun \hat{H}_0 kriegt eine relativistische Korrektur:

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{8} \frac{(p^2)^2}{m^3 c^2}$$

* Wie groß ist diese Korrektur?

Wir können eine einfache Einschätzung machen:

$$\frac{\langle \hat{H}_1 \rangle}{\langle \hat{H}_0 \rangle} \approx \frac{\langle P^4 / 8m^3 c^2 \rangle}{\langle P^2 / 2m \rangle} \approx \frac{\langle P^2 \rangle}{m^2 c^2} \approx 10^{-5} \text{ für Wasserstoff}$$

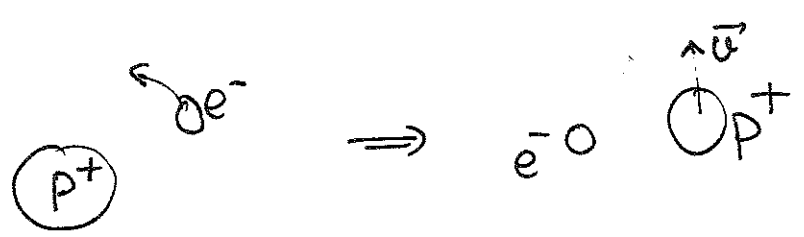
$$\left(\text{für H-Atome, } \langle P^2 \rangle \approx (m c \alpha)^2 \implies \frac{\langle \hat{H}_1 \rangle}{\langle \hat{H}_0 \rangle} \approx \alpha^2 \approx 10^{-4} \right)$$

* Die Korrektur ist also klein. Eigentlich ist die Korrektur sogar kleiner als die durch die reduzierte Masse bewirkte Korrektur (also die Tatsache, dass $\mu \neq m$).

LS-KOPPLUNG (SPIN-BAHN KOPPLUNG)

• Der Elektronenspin erfordert eine weitere Korrektur um gleicher Größenordnung. Es ist relativ einfach zu verstehen warum.

* Da das Elektron sich um das Proton bewegt, "sieht" das Elektron nicht nur das elektrische Feld des Protons, sondern auch ein zusätzliches Magnetfeld. Das ist einfach zu verstehen. Von einem mit dem Elektron verbundenen Koordinatensystem aus bewegt sich das Proton



Damit erzeugt das Proton auch ein Magnetfeld

(Bemerkung: Ich erinnere euch die Maxwell-Gleichungen)

• Wäre die Relativbewegung geradlinig, so wäre das vom Elektron gesehene Magnetfeld $(-\vec{v}) \times \vec{E} / c \equiv \vec{B}$.

• \vec{B} wechselwirkt mit dem magnetischen Moment des Elektrons (also mit dem Spin). Wir könnten also eine Wechselwirkung in folgender Form erwarten:

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{mc} \vec{S} \cdot \vec{B} = \frac{-e}{mc^2} \vec{S} \cdot (\vec{v} \times \vec{E}) = \vec{S} \cdot \vec{E} = -\nabla \phi(\vec{r})$$

$\phi(\vec{r}) = +ze^2/r$
↑ Potential der Kernladung

$$\frac{e}{m^2 c^2} \vec{S} \cdot (\vec{p} \times \nabla \phi) \rightarrow \nabla \phi(r) = \vec{e}_r \frac{d}{dr} \phi = \vec{r} \cdot \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}$$

$$= \frac{+e}{m^2 c^2} \vec{S} \cdot (\vec{p} \times \vec{r}) \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}$$

$$= \frac{-1}{m^2 c^2} \vec{S} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (e\phi) = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\phi(r) = +ze^2/r$

$$= \frac{-1}{m^2 c^2} \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{d[e\phi(r)]}{dr}$$

• In Wirklichkeit ist diese Erwartung aber nicht ganz richtig. Relativistische Effekte zusammen mit der nichtgeradlinigen Bewegung reduzieren den obigen Ausdruck um einen Faktor 2. Also der korrekte Störoperator ist

$$\hat{H}_2 = \frac{-1}{2m^2 c^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \frac{1}{r} \frac{d(e\phi)}{dr} = \frac{ze^2}{2m^2 c^2 r^3} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

Wir können eine Einschätzung machen: $\frac{\langle H_2 \rangle}{\langle H_0 \rangle} \sim \frac{e^2 \hbar^2 / m^2 c^2 a_0^3}{e^2 / a_0} = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2 a_0^2} \sim \alpha^2 = \left(\frac{1}{137}\right)^2 \approx 10^{-4}$
Also \hat{H}_1 und \hat{H}_2 sind ungefähr von derselben Größenordnung.

• Wir wollen nun die Störungstheorie 1. Ordnung anwenden, um die Auswirkung von \hat{H}_1 und \hat{H}_2 auf das Spektrum des H-Atoms zu sehen. (Wir benutzen entartete Störungstheorie für Zustände desselben n)

• Fangen wir mit \hat{H}_1 an:

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2} = -\frac{1}{2 m c^2} \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{2 m c^2} \left(\hat{H}_0 + \frac{z e^2}{r} \right) \left(\hat{H}_0 + \frac{z e^2}{r} \right)$$

hier vernachlässigen wir den Unterschied zwischen μ und m , der eigentlich höhere-Ordnung Korrekturen geben würde

d. m: (Bemerkung: \hat{H}_1 hängt nicht vom Winkel α , und deswegen mischt nicht Zustände mit verschiedenen l und m)

$$\langle \phi_{n \ell m} | \hat{H}_1 | \phi_{n \ell m} \rangle = -\frac{1}{2 m c^2} \langle \phi_{n \ell m} | \left(H_0 + \frac{z e^2}{r} \right) \left(H_0 + \frac{z e^2}{r} \right) | \phi_{n \ell m} \rangle$$

$$= -\frac{1}{2 m c^2} \left[E_n^2 + 2 E_n z e^2 \langle \frac{1}{r} \rangle_{n \ell} + (z e^2)^2 \langle \frac{1}{r^2} \rangle_{n \ell} \right]$$

wobei $\langle \frac{1}{r} \rangle_{n \ell} \equiv \langle \phi_{n \ell m} | \frac{1}{r} | \phi_{n \ell m} \rangle = \frac{z}{a_0 n^2}$

$$\langle \frac{1}{r^2} \rangle_{n \ell} \equiv \langle \phi_{n \ell m} | \frac{1}{r^2} | \phi_{n \ell m} \rangle = \frac{z^2}{a_0^2 n^3 (\ell + 1/2)}$$

also:

$$\langle \phi_{n \ell m} | \hat{H}_1 | \phi_{n \ell m} \rangle = \frac{1}{2 m c^2} \left[\left(\frac{m c^2 (z \alpha)^2}{2 n^2} \right)^2 - 2 z e^2 \frac{m c^2 (z \alpha)^2}{2 n^2} \left(\frac{z}{a_0 n^2} \right) + (z e^2)^2 \frac{z^2}{a_0^2 n^3 (\ell + 1/2)} \right]$$

$$= -\frac{m c^2}{2} (z \alpha)^2 \left[\frac{(z \alpha)^2}{n^3 (\ell + 1/2)} - \frac{3 (z \alpha)^2}{4 n^4} \right]$$

$$= \frac{m c^2}{4} (z \alpha)^4 \left[\frac{3}{2 n^4} - \frac{2}{n^3 (\ell + 1/2)} \right]$$

* Der Elektronenspin geht in diese Energieverschiebung nicht ein, da \hat{H}_1 unabhängig vom Spin ist.

* Im Gegenteil hängt \hat{H}_2 vom Spin ab:

$$\hat{H}_2 = \frac{ze^2}{2m^2c^2r^3} \hat{S} \cdot \hat{L}$$

Bei gegebenem n und l gibt es $2(2l+1)$ entartete Eigenzustände von \hat{H}_0 (der Vorfaktor 2 kommt von den beiden Spinzuständen).

Also wir haben hier ein Beispiel für Störungstheorie an entarteten Zuständen. Also die Berechnung der Energieverschiebung erfordert die Diagonalisierung einer Submatrix (für die entarteten Zustände).

* Evtmal arbeiten wir mit der Zusammensetzung von \hat{L} und \hat{S} :

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} \longrightarrow \hat{S} \cdot \hat{L} = \frac{1}{2} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2)$$

* Unsere entarteten Eigenfunktionen $|l, m_l; s, m_s\rangle$ sind Eigenfunktionen von $\{ \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z \}$. Wenn wir nun diese Eigenfunktionen kombinieren (ich erinnere euch an unsere Diskussion über die Clebsch-Gordan-Koeffizienten) dann erhalten wir die Basis der Eigenfunktionen $|j, m_j; l, s\rangle$ von $\{ \hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2 \}$. Die Elemente dieser neuen Basis sind schon die richtige Kombinationen, die

Die Submatrix von \hat{H}_2 diagonalisieren.

* Da $s = 1/2$ für das Elektron, dann $j = \begin{cases} l + 1/2 \\ |l - 1/2| \end{cases}$

* Also für $j = l + 1/2$

$$\begin{aligned} \hat{S} \cdot \hat{L} |l + \frac{1}{2}, m_j; l, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\hbar^2}{2} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2) |l + \frac{1}{2}, m_j; l + \frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left[(l + \frac{1}{2})(l + \frac{3}{2}) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) \right] |l + \frac{1}{2}, m_j; l, \frac{1}{2}\rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} l |l + \frac{1}{2}, m_j; l, \frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

und für $j = |l - 1/2|$ $l=0$ gibt Null

$$\begin{aligned} \hat{S} \cdot \hat{L} |l - \frac{1}{2}, m_j; l, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\hbar^2}{2} \left[(l - \frac{1}{2})(l + \frac{1}{2}) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] |l - \frac{1}{2}, m_j; l, \frac{1}{2}\rangle = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2} (l+1) |l - \frac{1}{2}, m_j; l, \frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

* Für gegebenes l hatten wir $2(2l+1)$ entartete Zustände (für \hat{H}_0).
Nun wegen \hat{H}_2 sind diese Zustände in 2 Teile gespalten:

- $2(l + 1/2) + 1$ Zustände mit $j_1 = l + 1/2$
- $2(l - 1/2) + 1$ Zustände mit $j_2 = l - 1/2$

* Für $j_1 = l + 1/2 \Rightarrow |\Phi_{n,j_1,m_e}\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{n,j_1,m_e} | \hat{H}_2 | \Phi_{n,j_1,m_e} \rangle &= \frac{ze^2}{2m^2c^2} \langle \frac{1}{r^3} \hat{S} \cdot \hat{L} \rangle \\ &= \frac{ze^2}{2m^2c^2} \frac{\hbar^2}{2} l \int_0^\infty r^2 dr [R_{n\ell}(r)]^2 \frac{1}{r^3} \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \int_0^\infty r^2 dr [R_{n\ell}(r)]^2 \frac{1}{r^3} = \langle \frac{1}{r^3} \rangle_{n\ell} = \frac{z^3}{a_0^3} \frac{1}{n^3 l(l + \frac{1}{2})(l+1)}$$

* Für $j_2 = l - 1/2$:

$$\langle \Phi_{n,j_2,m_e} | \hat{H}_2 | \Phi_{n,j_2,m_e} \rangle = -\frac{ze^2}{2m^2c^2} \frac{\hbar^2}{2} (l+1) \int_0^\infty r^2 dr [R_{n\ell}(r)]^2 \frac{1}{r^3}$$

• Also:

$$\langle \Phi_{n,j,m_e} | \hat{H}_2 | \Phi_{n,j,m_e} \rangle = \frac{mc^2 (Z\alpha)^4}{4} \frac{l}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}$$

$$\langle \Phi_{n,j,m_e} | \hat{H}_2 | \Phi_{n,j,m_e} \rangle = \frac{mc^2 (Z\alpha)^4}{4} \frac{[-l-1]}{n^3 l(l+1/2)(l+1)}$$

* Nun werden wir die 2 Verschiebungen (also für \hat{H}_1 und für \hat{H}_2) addieren:

$$\frac{mc^2}{4} (Z\alpha)^4 \left[\frac{3}{2n^4} - \frac{2}{n^3(l+1/2)} + \frac{\left\{ \begin{matrix} l \\ -(l+1) \end{matrix} \right\}}{n^3(l+1/2)l(l+1)} \right]$$

l für $j = l + 1/2$
 $-(l+1)$ für $j = l - 1/2$

$$= \frac{mc^2}{4} (Z\alpha)^4 \left[\frac{3}{2n^4} + \frac{1}{n^3(l+1/2)l(l+1)} \left\{ \begin{matrix} -2l(l+1) + l \\ -2l(l+1) - (l+1) \end{matrix} \right\} \right]$$

$$= \frac{mc^2}{4} (Z\alpha)^4 \left[\frac{3}{2n^4} - \frac{2}{n^3} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{l+1} \leftarrow \text{für } j = l + 1/2 \\ \frac{1}{l} \leftarrow \text{für } j = l - 1/2 \end{matrix} \right\} \right]$$

$$= \frac{mc^2}{4} (Z\alpha)^4 \left[\frac{3}{2n^4} - \frac{2}{n^3(j+1/2)} \right]$$

Bemerkung: das Ergebnis ist auch für $l=0$ gültig, aber um das zu zeigen braucht man die relativistische Dirac-Gleichung

$$= \boxed{-\frac{mc^2}{2} (Z\alpha)^4 \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right] = \Delta E_f}$$

* Diese Energieverschiebungen spalten Zustände die für H_0 allein entartet waren, und bilden damit die sogen. Feinstruktur.

* Sehen wir nun als Beispiel die Feinstruktur von $n=2$.

Für $n=2$ haben wir ^{mehrere} entartete Zustände: $2 \times n^2 = 8$

wegen Spin

Für $n=2 \rightarrow l=0, 1$

Da $s = 1/2 \xrightarrow{l=0} j = 1/2 \Rightarrow {}^2S_{1/2} \leftarrow 2 \text{ Zustände}$

$\swarrow \quad \searrow$
 $l=1 \rightarrow \begin{cases} j = 1/2 \Rightarrow {}^2P_{1/2} \leftarrow 2 \text{ Zustände} \\ j = 3/2 \Rightarrow {}^2P_{3/2} \leftarrow 4 \text{ Zustände} \end{cases}$

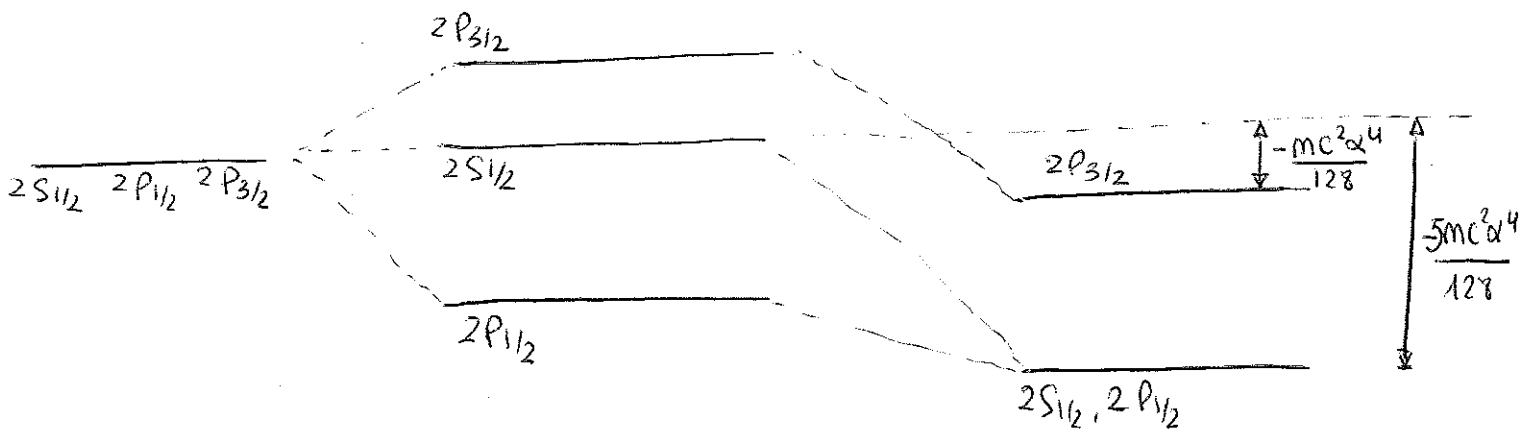
(Bemerkung: wir folgen hier die Notation)
 \sum_j^n $n \equiv$ Hauptquantenzahl
 $\sum \equiv S(l=0), P(l=1), \dots$

* Die Aufspaltung der Niveaus sieht so aus:

Nur H_0

$H_0 + LS\text{-Kopplung}$

$H_0 + LS\text{-Kop.} + \text{Relativistische Effekte}$



* Also die Feinstruktur zerstört nicht die Entartung zwischen $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$. Eigentlich genauere Korrekturen (Lamb-Effekt) zeigen, daß auch diese 2 Zustände nicht genau entartet sind.

(Bemerkung: Der Lamb-Effekt kommt aus der Wechselwirkung des Elektrons mit seinem eigenem elektromagnetischen Feld).

ZEEMAN - EFFEKT

- Wir werden nun sehen was passiert wenn die H-Atome in einem Magnetfeld sind.
- Wir haben schon in eine andere Vorlesung gesehen, daß der Drehimpuls mit dem Magnetfeld koppelt, und das sogen. Zeeman-Effekt verschiebt die Eigenenergien. Aber damals haben wir nicht den Spin einbezogen. Nun können wir eine bessere Theorie des Zeeman-Effektes machen.

* Nun das Magnetfeld koppelt mit

* Dem magnetischen Moment $\vec{\mu}_L = \frac{-e}{2mc} \vec{L}$ aus dem Bahndrehimpuls \vec{L}

* Dem magnetische Moment $\vec{\mu}_S = \frac{-eg}{2mc} \vec{S}$ aus dem Spindrehimpuls \vec{S} (wobei $g \approx 2$)

Die Energieverschiebung wegen der Kopplung zwischen Magnetfeld und magnetischen Moment ist (wie schon gesehen) der Form $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Hier haben wir also zwei Verschiebungen die sich

addieren: $\hat{H}_Z = -\vec{\mu}_L \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_S \cdot \vec{B} = \frac{e}{2mc} (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) \cdot B$

Sagen wir, daß $\vec{B} = B \hat{e}_z$, dann die Störoperator ist der Form:

$$\hat{H}_Z = \frac{e}{2mc} B (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)$$

Als ungestörten Hamilton-Operator verwenden wir das übliche \hat{H}_0 aber dormal mit dem Spin-Bahn Term \hat{H}_2 (wir nehmen hier \hat{H}_1 (relativistischer Effekt) weil \hat{H}_1 spin unabhängig ist).

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r} + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{ze^2}{r^3} \hat{L} \cdot \hat{S}$$

Wir addieren die LS-Kopplung zu \hat{H}_0 , weil die Störung \hat{H}_2 klein sein kann gegenüber der LS-Kopplung.

* Die Eigenzustände von \hat{H}_0 sind also nun der Form $|j, m_j; l, s\rangle$, also Eigenzustände von $\{ \hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2 \}$ wobei $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$.

In dieser Basis:

$$\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$$

$$\langle j, m_j; l, s | \hat{H}_2 | j, m_j; l, s \rangle = \frac{eB}{2mC} \langle j, m_j; l, s | (\hat{J}_z + \hat{S}_z) | j, m_j; l, s \rangle$$

$$= \frac{eB}{2mC} \left[m_j + \langle j, m_j; l, s | \hat{S}_z | j, m_j; l, s \rangle \right]$$

→ Um dieses Matrixelement zu finden, müssen wir $|j, m_j; l, s\rangle$ als Linearkombination von $|l, m; s, m_s\rangle$ schreiben ($m_j = m + m_s$)

$$|j, m_j; l, s\rangle = \langle j, m_j | l, m_j - 1/2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle |l, m_j - 1/2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \langle j, m_j | l, m_j + 1/2; \frac{1}{2}, -1/2 \rangle |l, m_j + 1/2; \frac{1}{2}, -1/2\rangle$$

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Dann:

$$\langle j, m_j; l, s | \hat{S}_z | j, m_j; l, s \rangle = |\langle j, m_j | l, m_j - 1/2; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle|^2 \times \frac{\hbar}{2} + |\langle j, m_j | l, m_j + 1/2; \frac{1}{2}, -1/2 \rangle|^2 \times \left(-\frac{\hbar}{2}\right)$$

* Da $s = 1/2 \rightarrow j = l - 1/2, l + 1/2$

* Für $j = l + 1/2$, und aus der Form der Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\langle l + \frac{1}{2}, m_j; l, s | \hat{H}_2 | l + \frac{1}{2}, m_j; l, s \rangle = \frac{eB}{2mC} \left[m_j + \frac{m_j}{2l+1} \right]$$

Für $j = l - 1/2$:

$$\langle l - \frac{1}{2}, m_j; l, s | \hat{H}_2 | l - \frac{1}{2}, m_j; l, s \rangle = \frac{eB}{2mC} \left[m_j - \frac{m_j}{2l+1} \right]$$

* Also die Energverschiebung wegen des Magnetfeldes ist:

$$\Delta E_z = \frac{e\hbar B}{2mC} m_j \left(1 \pm \frac{1}{2l+1} \right)$$

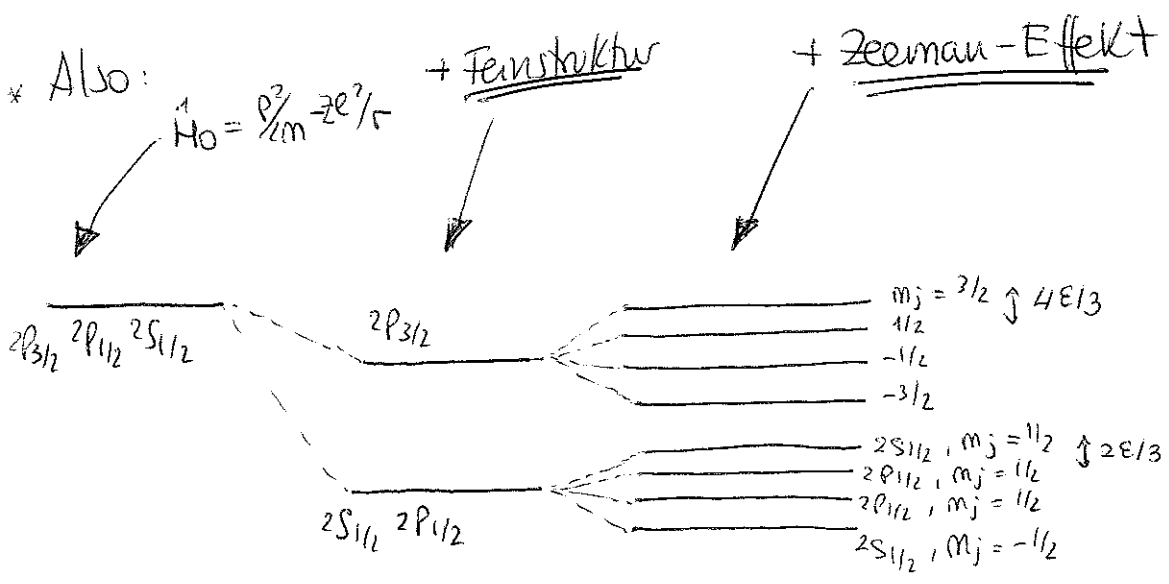
 für $j = l \pm 1/2$

* Nehmen wir noch mal als Beispiel die $n=2$ Zustände.

$$2P_{3/2} \rightarrow \left. \begin{matrix} l=1 \\ j=3/2 \end{matrix} \right\} \Delta E_z = \epsilon \times \frac{4}{3} m_j \quad (\text{wobei } \epsilon \equiv \frac{e\hbar B}{2mC})$$

$$2P_{1/2} \rightarrow \left. \begin{matrix} l=1 \\ j=1/2 \end{matrix} \right\} \Delta E_z = \epsilon + \frac{2}{3} m_j$$

$$2S_{1/2} \rightarrow \left. \begin{matrix} l=0 \\ j=1/2 \end{matrix} \right\} \Delta E_z = \epsilon \times 2 m_j$$

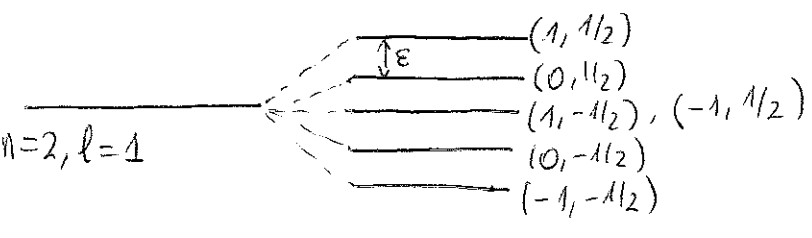
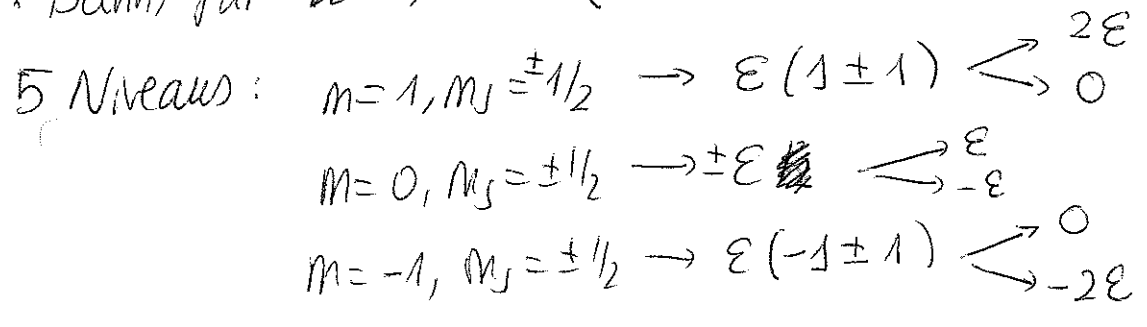


* Wenn \vec{B} ist sehr stark, dann können wir die LS Kopplung vernachlässigen, und wir dürfen die Zustände $|l, m; s, m_s\rangle$ einfach so verwenden:

$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \frac{ze^2}{r}$

$\langle l, m; s, m_s | \hat{H}_1 | l, m; s, m_s \rangle = \frac{e\hbar B}{2mC} (m + 2m_s) = \epsilon (m + 2m_s)$

* Dann, für $n=2, l=1$ (also 2p Zustände) haben wir



• DIE HYPERFEINSTRUKTUR

* Es gibt noch eine relativ wichtig Energiekorrektur, und zwar die sogen. Hyperfeinstruktur.

* Bisher haben wir das Proton (~~bzw~~ der Kern) als einen Massepunkt. Tatsächlich ist das Proton wie das Elektron ein spin-1/2 Teilchen.

Im Allgemeinen, bezeichnen wir den Kernspin mit \hat{I} . Zum Spin \hat{I} gehört ein magnetisches Dipolmoment

$$\hat{\mu}_I = \frac{ze\hbar N}{2M_N c} \hat{I}$$

wobei $g_N \equiv$ gyromagnetische Verhältnis (für das Proton) $g_p \approx 5,585$

$M_N \equiv$ die Kernmasse (für das Proton etwa 2000 größer als die Elektronmasse)

* Ein punktförmigen Dipol $\vec{\mu}_I$ erzeugt ein Magnetfeld

$$\vec{B}_I = -\frac{1}{4\pi} \vec{\mu}_I \nabla^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} [\vec{\mu}_I \cdot \vec{\nabla}] \frac{1}{r}$$

* Die Hyperfeinstruktur rührt her von diesem Magnetfeld. Der Störoperator kommt aus der Wechselwirkung zwischen \vec{B}_I

und dem magnetische Dipolmoment des Elektron:

$$\hat{H}_{MF} = -\hat{\mu}_e \cdot \vec{B}_I = \frac{e}{mc} \hat{S} \cdot \vec{B}_I =$$

$$= \frac{ze^2 g_N}{2mM_N c^2} \frac{1}{4\pi} \hat{S} \cdot \left[-\hat{I} \nabla^2 \frac{1}{r} + \vec{\nabla} (\hat{I} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} \right]$$

* Erstmals werden wir die Größenordnung der Hyperfeinstruktur stellen.

* Für die Einschätzung der Größenordnung, nehmen wir
 $S \sim \hbar$; $I \sim \hbar$; $\frac{1}{r} \sim \frac{1}{a_0}$; $v \sim \frac{1}{a_0}$

$$\text{Also: } H_{HF} \sim \frac{ze^2 g_N}{2mM_N c^2} \frac{\hbar^2}{4\pi a_0^3} = \frac{g_N}{8\pi} (z\alpha)^4 \left(\frac{m}{M_N}\right) mc^2$$

$$* H_F \sim \frac{(z\alpha)^4}{2} mc^2$$

$$\cdot \text{ Also } \frac{H_{HF}}{H_F} \sim \frac{m}{M_N} \sim \frac{1}{2000}$$

Also die Hyperfeinsplittung ist viel kleiner als die Feinstruktur (deswegen die Name Hyperfeinsplittung).

Als Beispiel wollen wir ~~die~~ Hyperfeinstruktur des $n=1$ -Niveaus.

Für $n=1$, $l=0 \rightarrow 1S_{1/2}$ Zustände.

$$\cdot \text{ Fein-Verschiebung: } \Delta E_f = -\frac{mc^2}{8} (z\alpha)^4$$

$$* \text{ Für } l=0 \rightarrow \Phi_{100}(\vec{r}) = \Phi_{100}(r) \text{ da } Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$$

Da $n=1$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{HF} &= \int d^3\vec{r} \Phi_{100}(\vec{r})^* \hat{H}_{HF} \Phi_{100}(\vec{r}) = \\ &= \frac{ze^2 g_N}{8\pi m M_N c^2} \int d^3\vec{r} \Phi_{100}(\vec{r})^* \left\{ -\hat{S} \cdot \hat{I} \nabla^2 \frac{1}{r} + (\hat{S} \cdot \vec{\nabla}) (\hat{I} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} \right\} \Phi_{100}(r) \end{aligned}$$

* Nehmen wir den 2. Glied des Integrals:

$$\int d^3\vec{r} |\Phi_{100}(r)|^2 (\hat{S} \cdot \vec{\nabla}) (\hat{I} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = \sum_{i,k} \int d^3r |\Phi_{100}(r)|^2 \hat{S}_i \hat{I}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r}$$

Da alle Terme des Integranden mit Ausnahme der Ableitungen sphärische Symmetrie aufweisen, so verschwindet die Integrations für $i \neq k$. Aus dem gleichen Grund sind alle $(i=k)$ -Beiträge

gleich, und damit

$$\begin{aligned} & \sum_i \int d^3r |\Phi_{100}(r)|^2 \hat{S}_i \hat{I}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} = \\ & = \sum_i \hat{S}_i \hat{I}_i \frac{1}{3} \int d^3r |\Phi_{100}(r)|^2 \nabla^2 \frac{1}{r} = \\ & = \frac{1}{3} \hat{S} \cdot \hat{I} \int d^3r |\Phi_{100}(r)|^2 \nabla^2 \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \Delta E_{HF} &= \frac{ze^2 g_N}{8\pi m m_N c^2} \int d^3r |\Phi_{100}(r)|^2 \left\{ -\hat{S} \cdot \hat{I} \nabla^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{3} \hat{S} \cdot \hat{I} \nabla^2 \frac{1}{r} \right\} \\ &= \frac{-ze^2 g_N}{12\pi m m_N c^2} \hat{S} \cdot \hat{I} \int d^3r |\Phi_{100}(r)|^2 \underbrace{\left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right)}_{-4\pi \delta(r)} \end{aligned}$$

$$= \frac{ze^2 g_N}{3 m m_N c^2} \hat{S} \cdot \hat{I} \cdot \underbrace{\int d^3r |\Phi_{100}(r)|^2 \delta(r)}_{|R_{10}(0)|^2 \rightarrow 4 \left(\frac{2\alpha m c}{\hbar} \right)^3}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{HF} = \frac{4}{3} g_N \frac{m}{m_N} (z\alpha)^4 m c^2 \left(\frac{\hat{S} \cdot \hat{I}}{\hbar^2} \right) = A \left(\frac{\hat{S} \cdot \hat{I}}{\hbar^2} \right)$$

Sei $\hat{F} = \hat{S} + \hat{I}$ der gesamte Spin des Elektrons und Kerns

$$\text{dann } \frac{\hat{S} \cdot \hat{I}}{\hbar^2} = \frac{1}{2\hbar^2} (\hat{F}^2 - \hat{S}^2 - \hat{I}^2) \rightarrow \frac{1}{2} [F(F+1) - \frac{3}{4} - I(I+1)]$$

* Wir gehen von der basis $|s, m_s; i, m_i\rangle$ um Eigenzustände
 von $\{\hat{S}_z, \hat{I}_z, \hat{S}^2, \hat{I}^2\}$ zu $|f, m_f; i, s\rangle$, also die Eigenzustände
 von $\{\hat{F}^2, \hat{F}_z, \hat{S}^2, \hat{I}^2\}$.

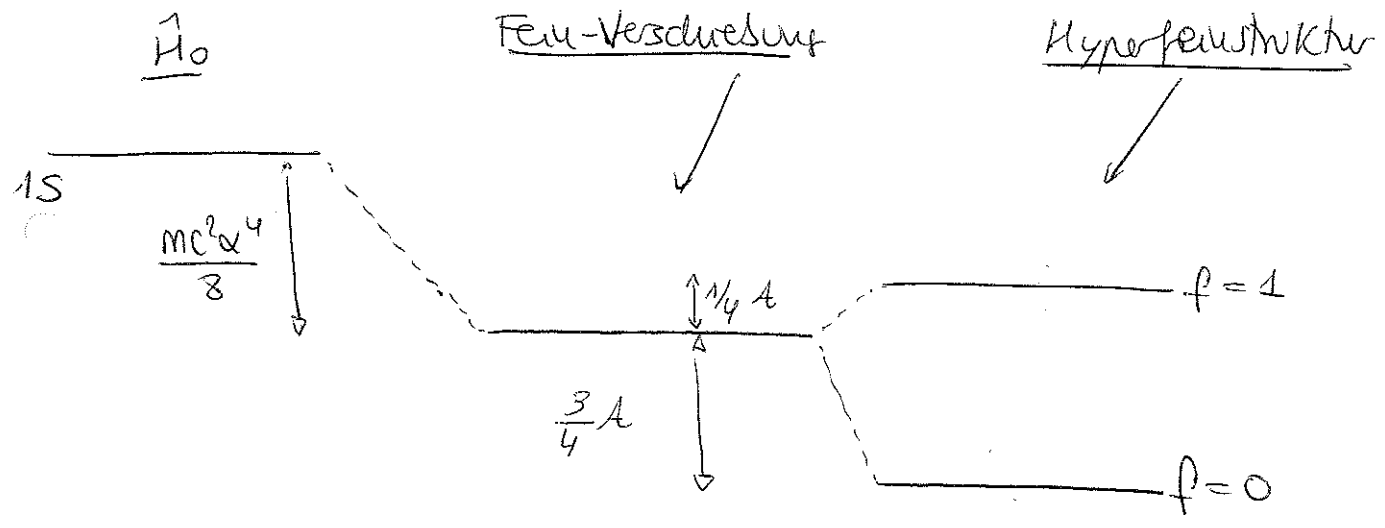
* Da $J = 1/2$, dann $F = i - 1/2, i + 1/2$

$f = i + 1/2 \rightarrow \Delta E_{HF} = \frac{A}{2} i$

$f = i - 1/2 \rightarrow \Delta E_{HF} = -\frac{A}{2} (i+1)$

Für Wasserstoffatomen $\rightarrow i = 1/2$

$\rightarrow A = \frac{4}{3} g_F \frac{m}{M_N} (\alpha)^4 mc^2$



Bei der Hyperfeinstruktur des Grundzustands des H-Atoms handelt es sich um eine physikalische Größe, die derzeit experimentell mit der größten Anzahl von Stellen bekannt ist

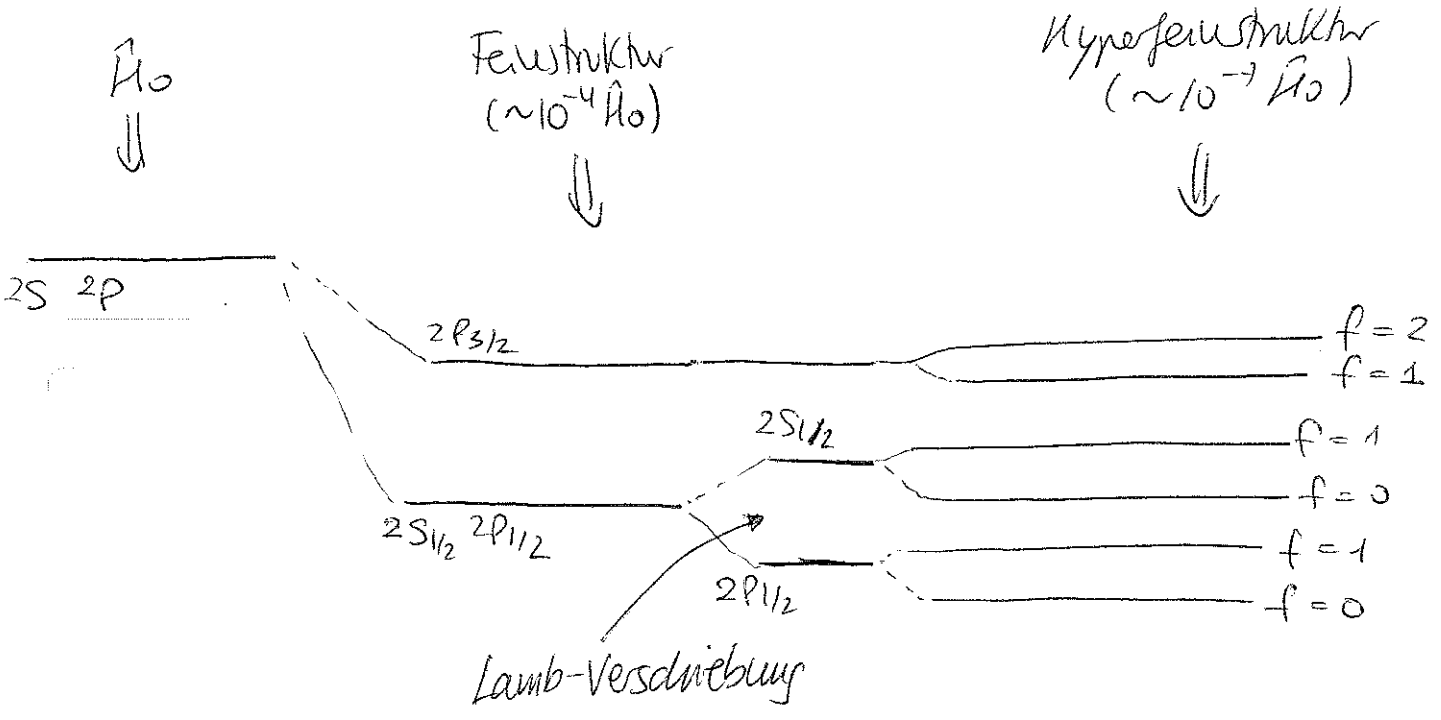
$A = 1420405751,768 \pm 0.001 \text{ Hz}$

Diese Übergang zwischen $f=1$ und $f=0$ in $1s$ Zustände des H-Atoms spielt eine sehr wichtige Rolle in der Radioastronomie. Fast Großteil von dem, was wir über interstellare Wasserstoffwolken wissen, entstammt der Untersuchung dieser Übergang

Bemerkung: Atome in $f=1$ zerfallen spontan in $f=0$, und erzeugen damit ein Photon der Wellenlänge $\approx 21 \text{ cm}$.

* Für andere Zustände mit $l > 0$, die Hyperfeinstruktur ist zwischen Zustände mit verschiedenen Werten von f , wobei $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$).

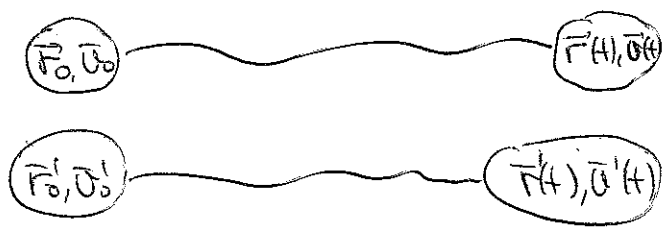
z.B. für $n=2$:



• SYSTEME IDENTISCHER TEILCHEN

- Bisher haben wir nur Probleme eines Teilchens gesehen (Bemerkung: für H-Atome hatten wir Kern + Elektron, aber die spielen deutlich ganz verschiedene Rolle).
- Wir werden nun untersuchen, was passiert, wenn man identische Teilchen hat.
- Zwei Teilchen heißen identisch, wenn alle inneren Eigenschaften (Masse, Spin, Ladung, usw.) exakt übereinstimmen. Es gibt kein Experiment, mit dem man die Teilchen voneinander unterscheiden könnte.
- Wenn ein physikalisches System zwei identische Teilchen enthält, werden seine Eigenschaften und seine Zeitentwicklung nicht beeinflusst, wenn diese Teilchen ihre Rollen tauschen.

• In der klassischen Mechanik stellt es kein besonderes Problem dar, wenn ein System aus identischen Teilchen besteht. Jedes Teilchen bewegt sich längs einer wohldefinierten Bahnkurve, durch die wir die Teilchen voneinander unterscheiden können, und sie während ihrer zeitlichen Entwicklung einzeln verfolgen können.

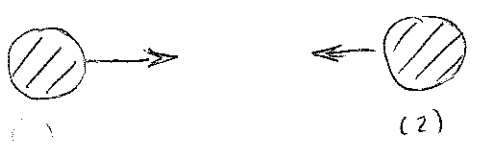


Da wir den Teilchen längs ihrer Bahn kontinuierlich folgen können, wissen wir zu jedem

Zeitpunkt, wo sich das Teilchen (1) oder (2) befindet. Deswegen, behandeln wir das System so, wie wenn die beiden Teilchen verschieden wären.

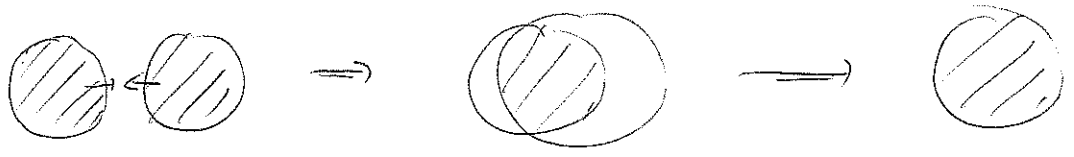
Die Situation in der Quantenmechanik ändert sich grundlegend, da man den Teilchen keine wohldefinierten Bahnkurven zuweisen kann. Selbst wenn zur Zeit t_0 die Wellenpakete vollständig voneinander getrennt sind, können sie sich im weiteren Verlauf überlappen.

Sehen wir als konkretes Beispiel den Stoß zweier identischer Teilchen.

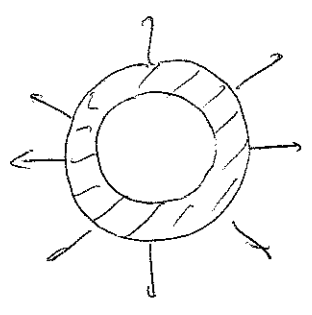


- Vor dem Stoß liegen 2 vollständig voneinander getrennte Wellenpakete vor, die sich aufeinander^{zu} bewegen.
- Wir bezeichnen (1) (links) und (2) (rechts)

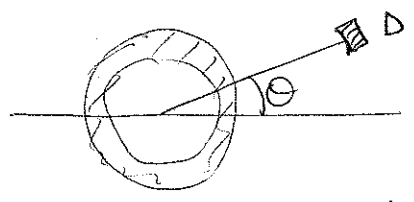
Während des Stoßes überlappen die beide Wellenpakete



Nach dem Stoß entspricht der Raumbereich, in dem die Wahrscheinlichkeitsdichte $\neq 0$ ist, einer Kugelschale, deren Radius wächst mit der Zeit

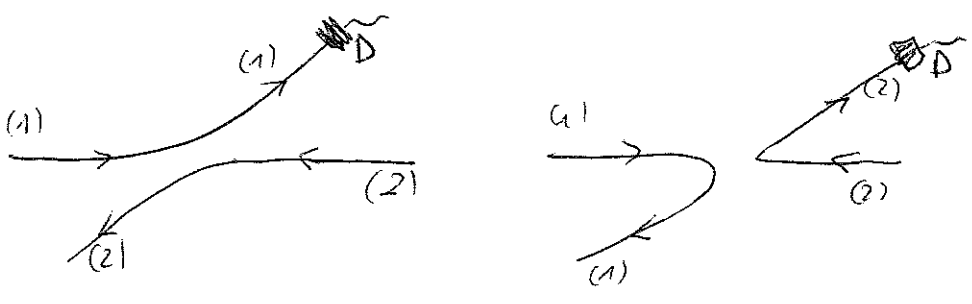


Sagen wir, daß wir ein Detektor D in einem Winkel θ platzieren:



Der Detektor detektiert ein Teilchen. Aufgrund der Impulserhaltung muß sich das andere Teilchen in die entgegengesetzte Richtung bewegen.

• Der Punkt ist, daß es unmöglich ist zu bestimmen, ob das in D detektierte Teilchen das aufwärts mit (1) oder das mit (2) nummerierte Teilchen ist!



Es gibt 2 verschiedene Wege auf denen das System am dem Anfangszustand in den bei der Messung festgestellten Endzustand übergegangen sein kann.

Welchen Weg das System genommen hat, kann auf keine Weise festgestellt werden. Dies führt in der Quantenmechanik zu einer grundsätzlichen Schamlosigkeit.

Austauschbarkeit

- * Sei ein System von 2 identischen spin-1/2 Teilchen. Wir beschränken uns auf die Untersuchung der Spinfreiheitsgrade.
- * Wir nehmen hier an, daß die S_z Komponente ist $\hbar/2$ für ein Teilchen und $-\hbar/2$ für das andere Teilchen.
- * Zur mathematischen Beschreibung des Systems nummerieren wir die beide Teilchen. Wir benutzen eine Basis $|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle \equiv |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$ → diese ist die Orthonormalbasis aus der gemeinsamen Eigenvektoren von \hat{S}_{1z} (Eigenwert $\epsilon_1 \hbar/2$) und \hat{S}_{2z} (Eigenwert $\epsilon_2 \hbar/2$).

* Die Reihenfolge der Vektoren spielt keine Rolle in dem Tensorprodukt, also:

$$|1:u_i; 2:u_j\rangle = |2:u_j; 1:u_i\rangle$$

* Man definiert den Permutationsoperator \hat{P}_{21} als ein linearer Operator sodass:

$$\hat{P}_{21} |1:u_i; 2:u_j\rangle = |2:u_i; 1:u_j\rangle = |1:u_j; 2:u_i\rangle$$

* Natürlich:

$$\hat{P}_{21}^2 |1:u_i; 2:u_j\rangle = \hat{P}_{21} |1:u_j; 2:u_i\rangle = |1:u_i; 2:u_j\rangle$$

Also $\boxed{\hat{P}_{21}^2 = \hat{1}}$

* Außerdem:

$$\langle 1:u_i; 2:u_j | \hat{P}_{21} | 1:u_i; 2:u_j \rangle = \langle 1:u_i; 2:u_j | 1:u_j; 2:u_i \rangle = \delta_{ij} \delta_{ji}$$

und

$$\langle 1:u_i; 2:u_j | \hat{P}_{21}^\dagger | 1:u_i; 2:u_j \rangle = \left(\langle 1:u_i; 2:u_j | \hat{P}_{21} | 1:u_i; 2:u_j \rangle \right)^*$$

$$= \left(\langle 1:u_i; 2:u_j | 1:u_j; 2:u_i \rangle \right)^* = \delta_{ij} \delta_{ji}$$

also $\hat{P}_{21} = \hat{P}_{21}^\dagger \rightarrow \hat{P}_{21}$ ist hermitisch. Damit sind die Eigenwerte von \hat{P}_{21} reell.

Da $\hat{P}_{21}^2 = \hat{1} \rightarrow$ Die Eigenwerte erfüllen $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

* Die Eigenvektoren sind also:

$$\hat{P}_{21} |\psi_S\rangle = + |\psi_S\rangle \rightarrow |\psi_S\rangle \text{ ist } \underline{\text{symmetrisch}}$$

$$\hat{P}_{21} |\psi_A\rangle = - |\psi_A\rangle \rightarrow |\psi_A\rangle \text{ ist } \underline{\text{antisymmetrisch}}$$

* Wir können nun die sogen. Symmetrisierungoperator (\hat{S}) und Antisymmetrisierungoperator (\hat{A}) einführen:

$$\hat{S} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \hat{P}_{21})$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} (\hat{1} - \hat{P}_{21})$$

Die erfüllen: $\hat{S}^2 = \hat{A}^2 = \hat{1}$

$$\hat{S}^\dagger = \hat{S}$$

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

$$\hat{S}\hat{A} = \hat{A}\hat{S} = 0$$

$$\hat{S} + \hat{A} = \hat{1} \quad \text{2-Teilchen}$$

* Für einen beliebigen ψ Vektor $|\psi\rangle$ wir können ein symmetrischer Vektor ($\hat{S}|\psi\rangle$) und ein antisymmetrischer Vektor ($\hat{A}|\psi\rangle$) bauen:

DAS SYMMETRISIERUNGSPOSTULAT

Das Symmetrisierungspostulat beschränkt die mögliche physikalische Zustände eines Systems von identischen Teilchen.

Die physikalischen Vektoren sind je nach der Natur der identischen Teilchen entweder total symmetrisch oder total antisymmetrisch in bezug auf die Permutationen dieser

Teilchen:

* Sind die physikalischen Vektoren symmetrisch, so heißen die Teilchen BOSONEN, sind sie antisymmetrisch, so nennt man die FERMIONEN.

* Dieses Postulat teilt die in der Natur existierende Teilchen in 2 Kategorien:

- BOSONEN: Teilchen mit ganzzahligen Spin (z.B. Photon)
- FERMIONEN: Teilchen mit halbzahligem Spin (z.B. Elektron)

(Bemerkung: die Verbindung zwischen Spin und Boson/Fermion Natur ist eigentlich empirisch.)

• Das Symmetrisierungspostulat hebt die Schwierigkeiten der Austauschbarkeit auf.

Nehmen wir 2 identische Teilchen. Ein Teilchen befindet sich in dem Einzelteilchen Zustand $|p\rangle$, und das andere in $|x\rangle$.

① Das Teilchen in $|p\rangle$ erhält z.B. die Nummer 1, und das Teilchen in $|x\rangle$ die Nummer 2.

$$|u\rangle \equiv |1:p; 2:x\rangle$$

② Sind die Teilchen Bosonen, so symmetrisieren wir $|u\rangle$:

$$\hat{S}|u\rangle = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{P}_{12})|u\rangle = \frac{1}{2}[|1:p; 2:x\rangle + |1:x; 2:p\rangle]$$

Sind die Fermionen, so antisymmetrisieren wir $|u\rangle$:

$$\hat{A}|u\rangle = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \hat{P}_{12})|u\rangle = \frac{1}{2}[|1:p; 2:x\rangle - |1:x; 2:p\rangle]$$

③ Wir normieren die Vektoren:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|1:p; 2:x\rangle + \epsilon |1:x; 2:p\rangle] \quad \epsilon = \begin{cases} +1 & \rightarrow \text{Bosonen} \\ -1 & \rightarrow \text{Fermionen} \end{cases}$$

Diese sind die normierten physikalischen Zustände.

* fehlen mir nur, was passiert wenn $\chi = -1$.

Für Bosonen erhalten wir als normierte physikalische Zustand, einfach $|1:l; 2:l\rangle$, das ist ja immer schon symmetrisch.

Aber für Fermionen etwas bemerkenswertes passiert.

$$\hat{A} |1:l; 2:l\rangle = \frac{1}{2} (|1:l; 2:l\rangle - |1:l; 2:l\rangle) = 0$$

Es gibt also keinen physikalischen Vektor, der den Zustand von 2 Fermionen beschreiben kann, die sich im selben Einzelzustand $|l\rangle$ befinden.

Zwei identische Fermionen können nicht im selben Einzelzustand sein \implies PAULISCHE AUSSCHLIEßUNGSPRINZIP
(oder einfach PAULI-PRINZIP)

Dieses Prinzip hat weitreichende physikalische Konsequenzen.

• VERALLGEMEINERUNG FÜR MEHREREN TEILCHEN

• Die Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Austauschbarkeit treten bei der Untersuchung aller Systeme auf, die eine beliebige Anzahl $N > 1$ identischer Teilchen enthalten.

z.B. nehmen wir $N=3$

Nehmen wir ein Operator \hat{B} mit Eigenzustände $|b_n\rangle$ und Eigenwerte b_n ($n=1,2,3,\dots$)

Die dreiteilchen-Zustände sind der Form:

$$|1: b_i; 2: b_j; 3: b_k\rangle \text{ wobei } i, j, k = 1, 2, 3, \dots$$

Wir messen \hat{B} . Eine solche Messung ergibt 3 unterschiedlichen Eigenwerte b_n, b_p und b_q . Dann tritt noch mal Austausch-entwertung auf, da der Zustand des Systems nach der Messung a priori durch einen beliebigen Vektor des Unterraum gelesen werden kann, der durch die folgenden sechs Basisvektoren aufgespannt wird:

$$|1: b_n; 2: b_p; 3: b_q\rangle, |1: b_q; 2: b_n; 3: b_p\rangle, |1: b_p; 2: b_p; 3: b_n\rangle, |1: b_n; 2: b_q; 3: b_p\rangle, |1: b_p; 2: b_n; 3: b_q\rangle, |1: b_q; 2: b_p; 3: b_n\rangle$$

Also es ist nicht möglich, durch eine vollständige Messung an jedem Teilchen einen eindeutigen Ketvektor aus dem Zustandsraum des Systems zu erhalten.

Permutationsoperatoren für $N > 2$

Sei $N=3$

Für 3 Elementen lassen wir 6 mögliche Permutationen

\hat{P}_{123} , \hat{P}_{212} , \hat{P}_{231} , \hat{P}_{132} , \hat{P}_{213} und \hat{P}_{321}

$$\hat{P}_{pnpq} |1:u_i; 2:u_j; 3:u_k\rangle = |n:u_i; p:u_j; q:u_k\rangle$$

z.B.

$$\begin{aligned} \hat{P}_{231} |1:u_i; 2:u_j; 3:u_k\rangle &= |2:u_i; 3:u_j; 1:u_k\rangle \\ &= |1:u_k; 2:u_i; 3:u_j\rangle \end{aligned}$$

Für größere N hat man $N!$ Permutationen, die genau entsprechend sich definieren lassen.

Die Permutation erfüllen verschiedene Eigenschaften:

* $\hat{P}_{123} \equiv$ Einheitsoperator

* Das Produkt 2 Permutationen ist eine Permutation

z.B. $\hat{P}_{312} \hat{P}_{132} = \hat{P}_{321}$

* Permutationsoperatoren kommutieren nicht miteinander

z.B. $\hat{P}_{312} \hat{P}_{132} = \hat{P}_{321}$

$\hat{P}_{132} \hat{P}_{312} = \hat{P}_{213}$

* Eine Transposition ist eine Permutation, bei der nur 2 Teildien vertauscht werden.

z.B. \hat{P}_{213}

Jeder Permutationsoperator kann in ein Produkt von Transpositionen zerlegt werden

z.B. $\hat{P}_{312} = \hat{P}_{32} \hat{P}_{213}$ } Diese Zerlegung ist nicht eindeutig.
 $= \hat{P}_{213} \hat{P}_{321}$ }

Was wichtig ist, ist dass die Parität der Permutation die Parität der Anzahl an Transpositionen ist.

z.B. $\hat{P}_{312} \Rightarrow 2$ Transpositionen \Rightarrow gerade

Da die Permutationsoperatoren für $N > 2$ nicht kommutieren, ist es nicht möglich, eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren zu konstruieren. Aber es gibt bestimmte Vektoren, die gemeinsame Eigenwerte aller Permutationsoperatoren sind:

$\hat{P}_\alpha |\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle$ für alle Permutation P_α

\hookrightarrow heißt total symmetrisch.

$\hat{D}_\alpha |\psi_A\rangle = \epsilon_\alpha |\psi_A\rangle$ $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_\alpha = 1 \text{ für gerade } P_\alpha \\ \epsilon_\alpha = -1 \text{ für ungerade } P_\alpha \end{array} \right\}$

Wir können wie für $N=2$ die Symmetrisch- bzw. Antisymmetrischoperatoren ~~ein~~ einführen:

$\hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \hat{P}_\alpha$

$\hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_\alpha \epsilon_\alpha \hat{P}_\alpha$

Man kann relativ einfach zeigen, dass:

- $\hat{S}^\dagger = \hat{S}$
- $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
- $\hat{S}^2 = \hat{S}$
- $\hat{A}^2 = \hat{A}$
- $\hat{A}\hat{S} = \hat{S}\hat{A} = 0$

* Das Symmetriepostulat funktioniert wie für 2 Teilchen.
 Die physikalische Vektoren sind entweder total symmetrisch (Bosonen) oder total antisymmetrisch (Fermionen).

* Nehmen wir $N=3$

① Bosonen

$$|u\rangle \equiv |1:l; 2:x; 3:w\rangle$$

$$\hat{S}|u\rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\alpha} P_{\alpha} |u\rangle = \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{l} |1:l; 2:x; 3:w\rangle + |1:w; 2:l; 3:x\rangle \\ + |1:x; 2:w; 3:l\rangle + |1:l; 2:w; 3:x\rangle \\ + |1:x; 2:l; 3:w\rangle + |1:w; 2:x; 3:l\rangle \end{array} \right\}$$

Diesen Vektor müssen wir normieren.

Wenn $|l\rangle, |x\rangle$ und $|w\rangle$ orthogonal sind, dann:

$$\hat{S}|u\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \begin{array}{l} |1;l; 2:x; 3:w\rangle + \dots \\ \dots + |1:w; 2:x; 3:l\rangle \end{array} \right\}$$

Wenn $|l\rangle = |x\rangle$:

$$\hat{S}|u\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\begin{array}{l} |1;l; 2:l; 3:w\rangle + |1:l; 2:w; 3:l\rangle \\ + |1:w; 2:l; 3:l\rangle \end{array} \right]$$

② Fermionen

$$\hat{A}|u\rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} |1:p; 2:x; 3:w\rangle$$

Die Vorzeichen der verschiedenen Terme der Summe gehorchen derselben Regel, die auch bei der Berechnung einer 3x3-Determinante Anwendung findet. Also:

$$\hat{A}|u\rangle = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} |1:p\rangle & |1:x\rangle & |1:w\rangle \\ |2:p\rangle & |2:x\rangle & |2:w\rangle \\ |3:p\rangle & |3:x\rangle & |3:w\rangle \end{vmatrix} \equiv \frac{\text{SLATER -}}{\text{-DETERMINANTE}}$$

Es ist klar, dass $\hat{A}|u\rangle = 0$, wenn 2 der Einzelzustände $|p\rangle, |x\rangle$ oder $|w\rangle$ übereinstimmen. Wir finden also wieder das Pauli-Prinzip.

Für die Normierung müssen wir nur $\frac{1}{3!}$ durch $\frac{1}{\sqrt{3!}}$ zu ersetzen.

- Für $N > 3$ ist die Verallgemeinerung klar (z.B. wir machen ein $N \times N$ Slater-Determinant).
- Die Physik für Bosonen und Fermionen ist ganz verschieden. Die Analyse dieser Physik ist eigentlich der Kern der Quantenstatistische-physik, die ihr nächsten Semester sehen wird.