• DIE ZEITUNABHÄNGIGE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG

* Wir haben also gesehen, daß

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\,\psi(x,t) \Rightarrow$$ Zeitabhängige Schrödinger-gleichung.

* Wir suchen nun nach einer Lösung der Form:

$$\psi(x,t) = F(t)\,u(x)$$ ⇒ also wir spalten die Funktion von 2 Variablen (x,t) in 2 Funktionen einer Variable

* Dann:

$$i\hbar\, u(x)\frac{dF(t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)\,u(x)\right]F(t)$$

Also

$$i\hbar \frac{1}{F(t)}\frac{dF(t)}{dt} = \frac{1}{u(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)\,u(x)\right]$$

Diese gleichung kann nur erfüllt werden, wenn beide Seiten der gleichung gleich eine Konstant E sind. Also:

$$i\hbar\frac{dF(t)}{dt} = E\,F(t) \longrightarrow F(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konstant}}}{C}\, e^{-iEt/\hbar}$$

und:

$$\boxed{E\,u(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)\,u(x) = \hat{H}\,u(x)}$$

⟶ Diese ist die sogen. zeitunabhängige Schrödinger gleichung

* Diese gleichung ist eine sogen. Eigenwertgleichung.

* Wir werden nun ganz kurz die Idee von Eigenwerte und Eigenfunktionen einführen.

- Eigenwerte und Eigenfunktionen

* Wir haben schon die Idee von Operator eingeführt, z.B. $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
* Ein Operator bringt eine Funktion in eine andere Funktion

$$\hat{O}\, f(x) \longrightarrow g(x)$$

z.B. $\hat{O} f(x) = f(x)^2$

oder $\hat{O} f(x) = \frac{d}{dx} f(x) + c f(x)$

* Es gibt eine besondere Sort von Operatoren, die sogen. lineare Operatoren (nennen wir die als L) die erfüllen:

(i) $L[f_1(x) + f_2(x)] = L[f_1(x)] + L[f_2(x)]$

(ii) $L[c f(x)] = c\, L[f(x)]$ $\quad c =$ Konstante

z.B. $\frac{d}{dx} f(x) + c f(x)$ ist linear, aber $f(x)^2$ ist nicht.

* Es gibt aber besondere Funktionen, die erfüllen daß für ein Operator $\hat{O}$

$\hat{O} f(x) = \lambda f(x)$ $\quad$ wobei λ ist eine Konstante.

* Diese Funktionen sind die Eigenfunktionen von $\hat{O}$ und die Konstanten (λ) sind die Eigenwerte.

* Der Hamilton Operator $\hat{H}$ ist ein Beispiel von linearen Operator. Die Eigenwerte E von $\hat{H}$ heißen die Eigenenergien (da $\hat{H}$ der Energie-Operator) ist. Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ist also, wie schon gesagt, eine Eigengleichung

$$E u_E(x) = \hat{H} u_E(x)$$

* Aus unserer ursprüngliche Diskussion, für Eigenfunktionen:

$$\psi(x,t) = F(t)\,u(x) \longrightarrow \boxed{\psi_E(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\,\psi_E(x,t=0)}$$

Also die Eigenfunktionen der Hamilton-Operator ändern sich sehr einfach in der Zeit:

(i) Die kriegen nur eine Phase $e^{-iEt/\hbar}$

(ii) Also, $|\psi_E(x,t)|^2 = |\psi_E(x,t=0)|^2 \longrightarrow$ Die assoziierte Dichte bleibt konstant.

MATHEMATISCHE NOTE: HERMITISCHE OPERATOREN

· Der Hamilton-Operator ist ein Beispiel von Hermitischen Operator.

· Wir werden hier nicht alle Eigenschaften der Hermitischen Operatoren studieren. Am wichtigsten für uns nun ist, daß für Hermitischen Operatoren $\hat{A}$ ist der Erwartungswert

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, \hat{A}\, \psi(x)$$

für jede mögliche $\psi(x)$ reell.

· Natürlich $\langle \hat{H} \rangle$ ist reell $\longrightarrow$ ist eine Energie. Also $\hat{H}$ ist Hermitisch.

· Wir werden später andere Hermitische Operatoren treffen.

· Zwei andere wichtige Eigenschaften der Hermitischen Operatoren:

· Eigenfunktionen $(\psi_1(x), \psi_2(x))$ mit verschiedenen Eigenwerte (λ_1, λ_2) sind orthogonal, also $\int \psi_2^*(x)\, \psi_1(x)\, dx = 0$

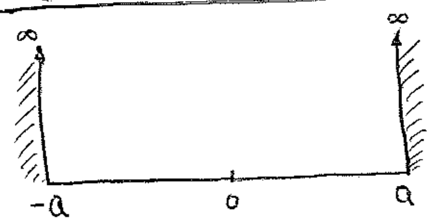
· Die Eigenfunktionen eines Hermitischen Operators sind komplett, also wir können alle andere Funktion als linear Kombination dieser Eigenfunktionen darstellen.

* Also, wir haben gesehen, daß der Hamilton-Operator $\hat{H}$ bestimmte Eigenwerte (E) und Eigenfunktionen ($u(x)$) hat, und daß diese Funktionen und Werten durch die Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung gegeben werden.

* Wir werden nun ein Beispiel sehen: die "Potential-Kiste".

Nehmen wir: $V(x) = 0 \quad |x| < a$

$\qquad = \infty \quad |x| \geq a \implies$



* Da $V(x) = \infty$ für $|x| \geq a$, daß bedeutet daß $u(x) = 0$ für $|x| \geq a$ (wir können kein Teilchen da finden, sonst wäre die Energie unendlich!).

Also $u(a) = u(-a) = 0 \implies$ Randbedingungen

* Innerhalb der Kiste $V(x) = 0$, also die Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung wird:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} = E\,u(x) \implies \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u(x) = 0$$

* Die Eigenenergien E müssen positiv sein. Sehen wir das. Sagen wir, daß $E < 0$. Sei $k^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$. Dann

$$\frac{d^2u}{dx^2} - k^2 u(x) = 0 \rightarrow u(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$$

Aber diese Lösungen können nicht die Randbedingungen erfüllen.

Also E muß positiv sein.

Sei $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \longrightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = 0 \rightarrow$ Die Lösungen dieser Gleichungen sind: $\cos(kx)$

oder $\sin(kx)$

* Nehmen wir die $\sin(kx)$ Lösungen. (Ungerade Funktionen)

$$u^{(-)}(x) = \sin kx \longrightarrow u^{(-)}(a) = \sin ka = 0$$

Also $ka = n\pi$ wobei $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Big\} \; u_n^{(-)}(x) = \sin\left[\frac{n\pi}{a}x\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Deswegen $\boxed{E_n^{(-)} = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$

Wir schreiben $\frac{1}{\sqrt{a}}$, weil wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} |u_n^{-}(x)|^2 dx = 1$ (Normalisierung)

* Nehmen wir nun die $\cos(kx)$ Lösungen (gerade Funktionen)

$$u^{(+)}(x) = \cos kx \longrightarrow u^{(+)}(a) = \cos ka = 0$$

Also $ka = (n - \frac{1}{2})\pi$ wobei $n = 1, 2, 3 \dots$

$$\Big\} \; u_n^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{a}\right]$$

Deswegen $\boxed{E_n^{(+)} = \frac{[n-\frac{1}{2}]^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$

* Es ist einfach zu sehen, daß

$$\int_{-a}^{a} dx\, u_m^{(+)}(x)^* u_n^{(+)}(x) = \int_{-a}^{a} dx\, u_m^{(-)}(x)^* u_n^{(-)}(x) = \delta_{n,m}$$

$$\int_{-a}^{a} dx\, u_m^{(+)}(x)^* u_n^{(-)}(x) = 0$$

Orthonormalität. (Wir kennen schon, daß das ist eine Eigenschaft der Hermitische Operatoren)

* Also die Eigenenergien sind nicht etwas Kontinuerliches, sondern die nehmen diskrete Werten.

Die niedrigste Energie in der Kiste ist

$$E_1^{(+)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} \Longrightarrow u_1^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left[\frac{\pi x}{2a}\right] \Rrightarrow \underline{\text{Grundzustand}}$$

* Aufpassen: die niedrigste Energie der Kiste ist nicht Null, wie man klassisch erwarten könnte. Das ist die sogenannte <u>Null-Punkt Energie</u>. Die Idee der Null-punkt Energie ist sehr wichtig!

* Wie sieht's für den Impuls p in der Kiste aus?

* Wir haben schon gesehen, daß $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

Also $\langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \int_{-a}^{a} dx \, u^*(x) \frac{\partial}{\partial x} u(x)$

* Die Eigenfunktionen der Kiste sind entweder gerade oder ungerade. Wenn $u(x)$ gerade ist, dann ist $\frac{\partial}{\partial x} u(x)$ ungerade, und umgekehrt. Also $u^* \frac{\partial}{\partial x} u$ ist immer ungerade, also $\int_{-a}^{a} dx \, u^* \frac{\partial}{\partial x} u = 0$, also $\langle \hat{p} \rangle = 0$.

* Aber $\langle \hat{p}^2 \rangle = 2m E_n^{\pm}$

* Für den Grundzustand $\langle \hat{p}^2 \rangle = 2m E_1^{+} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4a^2}$

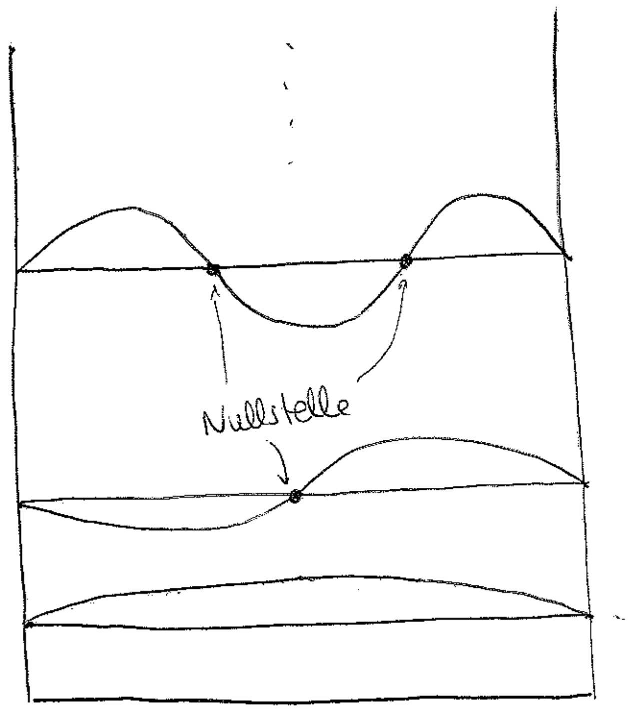
* Also die Varianz $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \frac{\pi \hbar}{2a}$

* Die Ortsungenauigkeit ist $\Delta x = 2a$ (also die Breite der Kiste)

Also $\Delta x \cdot \Delta p = 2a \cdot \frac{\pi \hbar}{2a} = \pi \hbar > \hbar$ (Unschärferelation)

---

* Also die Moden der Kiste sehen so aus:



* Je größer die Anzahl von Nullstellen, je größer die Energie. Das ist klar, weil je größer die Kurvatur ist, desto größer ist die kinetische Energie:

$E_K \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$ (die 2. Ableitung mißt die Kurvatur)

• Also, wir kennen schon die Eigenfunktionen $[u_n^{(\pm)}(x)]$ und Eigenwerte $(E_n^{(\pm)})$ des Potentialkiste.

Alle andere Funktion $\psi(x)$, die die Randbedingungen $\psi(a)=\psi(-a)=0$ erfüllt, kann als Linearkombination der Eigenfunktionen von $\hat{H}$ geschrieben werden (ich erinnere euch unsere Diskussion über Hermitischen Operatoren).

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^{(+)}u_n^{(+)}(x) + A_n^{(-)}u_n^{(-)}(x)\right]$$

Wir werden nun diese ~~Koeffizienten~~ Koeffizienten $A_n^{(\pm)}$ näher betrachten.

Zuerst, gegebene $\psi(x)$ und für bekannte Eigenfunktionen $u_n^{(\pm)}(x)$ wie bestimmen wir $A_n^{(\pm)}$. Ganz einfach, wir werden die Orthonormalität der Eigenfunktionen benutzen:

Orthonormalität der Eigenfunktionen

$$\int dx\, u_n^{(+)*}\psi(x) = \sum_{n'=1}^{\infty}\int dx\left\{A_{n'}^{(+)}u_n^{(+)}(x)^* u_{n'}^{(+)}(x) + A_{n'}^{(-)}u_n^{(+)}(x)^* u_{n'}^{(-)}(x)\right\} = A_n^{(+)}$$

Hence $\boxed{A_n^{(\pm)} = \int dx\, u_n^{(\pm)*}\psi(x)}$

• *Es ist immer eine gute Idee die Funktionen $\psi(x)$ als Linearkombination von Eigenfunktionen zu schreiben, weil dann ist die Zeitabhängigkeit klar:*

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^{(+)}u_n^{(+)}(x)\,e^{-iE_n^{(+)}t/\hbar} + A_n^{(-)}u_n^{(-)}(x)\,e^{-iE_n^{(-)}t/\hbar}\right]$$

• *Wir werden nun versuchen, die physikalische Bedeutung von $A_n^{(+)}$ zu verstehen. Rechnen wir den Erwartungswert der Energie $\langle H\rangle$ für die Wellenfunktion $\psi(x)$:*

$$\langle\hat{H}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi^*(x)\hat{H}\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}dx\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^{(+)*}u_n^{(+)}(x)^* + A_n^{(-)*}u_n^{(-)}(x)^*\right)\right\}\hat{H}\left\{\sum_{n'=1}^{\infty}\left(A_{n'}^{(+)}u_{n'}^{(+)}(x) + A_{n'}^{(-)}u_{n'}^{(-)}(x)\right)\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n'=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left\{A_n^{(+)*}u_n^{(+)}(x)^* + A_n^{(-)*}u_n^{(-)}(x)^*\right\}\left\{A_{n'}^{(+)}E_{n'}^{(+)}u_{n'}^{(+)}(x) + A_{n'}^{(-)}E_{n'}^{(-)}u_{n'}^{(-)}(x)\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n^{(+)}|A_n^{(+)}|^2 + E_n^{(-)}|A_n^{(-)}|^2\right]$$

* Wir kennen auch, daß die Wellenfunktion normalisiert ist

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x)\,\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[|A_n^{(+)}|^2+|A_n^{(-)}|^2\right]$$

* Also $|A_n^{(\pm)}|^2$ gibt uns die Wahrscheinlichkeit einer Energie $E_n^{(\pm)}$ zu messen.

* Wir würden $E_n^{(+)}$ mit 100% Wahrscheinlichkeit, wenn $\psi(x)=u_n^{(+)}(x)$ wäre. Das bringt uns zu einem wichtigen Punkt.

Sagen wir, daß wir $\psi(x)$ haben, und wir messen die Energie, und wir bekommen $E_n^{(+)}$. Wie ist die Wellenfunktion nach der Messung? Nach der Messung die Wellenfunktion wir in $u_n^{(+)}(x)$ projeziert:

$\boxed{\psi(x)} \Longrightarrow$ MESSUNG DER ENERGIE $\Longrightarrow \boxed{u_n^{(+)}(x)}$

$\Downarrow$

KOMMT $E_n^{(+)}$ RAUS

Natürlich, später alle ander Messung der Energie gibt (nun mit 100% Wahrscheinlichkeit) $E_n^{(+)}$.

---

* Wie schon gesagt die Idee von Eigenwerte und Eigenfunktionen betrifft nicht nur $\hat{H}$ sondern alle andere Operatoren.

Wir werden nun 2 andere Operatoren studieren

- Paritäts-Operator ($\hat{P}$)
- Impuls-Operator ($\hat{p}$)

- **Paritäts-Operator**

* Wir haben die Eigenfunktionen des Potentialkasten in 2 Gruppen unterteilt: gerade Funktionen $u^{(+)}(x) = u^{(+)}(-x)$, und ungerade Funktionen $u^{(-)}(x) = -u^{(-)}(-x)$. Wir werden nun die Idee von Parität formalisieren. Die Parität (und im allgemeinen alle Symmetrien) ist eine ziemlich wichtige Eigenschaft.

- Wir führen nun den Paritäts-Operator ein:

$$\mathbb{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

Für gerade Funktionen

$$\mathbb{P}\psi^{(+)}(x) = \psi^{(+)}(-x) = \psi^{(+)}(x)$$

Für ungerade Funktionen

$$\mathbb{P}\psi^{(-)}(x) = \psi^{(-)}(-x) = -\psi^{(-)}(x)$$

Also die gerade Funktionen sind Eigenfunktionen von $\mathbb{P}$ mit Eigenwert $+1$, und die ungerade Funktionen ebenfalls, aber mit Eigenwert -1.

- Also (und das ist wichtig) die Funktionen $u^{(\pm)}(x)$ sind gleichzeitig Eigenfunktionen von $\hat{H}$ und von $\hat{\mathbb{P}}$.

- Eigentlich ± 1 sind die einzig möglichen Eigenwerte von $\mathbb{P}$, da $\mathbb{P}^2\psi(x) = \mathbb{P}(\lambda\psi(x)) = \lambda^2\psi(x)$, aber $\mathbb{P}^2\psi(x) = \mathbb{P}\psi(-x) = \psi(x)$

also $\lambda^2 = 1$, also $\lambda = \pm 1$.

* Eigentlich eine beliebige Funktion $\psi(x)$ kann als Superposition von einer geraden und einer ungeraden Funktion:

$$\psi(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}[\psi(x)+\psi(-x)]}_{\text{gerade}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[\psi(x)-\psi(-x)]}_{\text{Ungerade}}$$

(Wie schon gesagt, die Eigenfunktionen eines Hermitischen-Operators bilden einen vollständigen Satz von Funktionen)

· Was passiert mit der Parität einer Funktion in der Zeit?
Anders ausgedrückt, wenn $\psi(x,t=0)$ eine definierte (gerade oder ungerade) Parität hat, hat auch $\psi(x,t)$ ~~dieselbe~~ definierte Parität?
Das hängt von der Symmetrie von $\hat{H}$, also von der Symmetrie des Potentials $V(x)$.

· Sehen wir das.
Die Schrödinger-~~Gleich~~ung sagt uns, daß:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hat{H}\psi(x,t)$$

Das bedeutet, daß $V(x) = V(-x)$
Der $\hat{H}$-Operator ist Symmetrisch

Also $$\hat{\mathbb{P}}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbb{P}}\psi(x,t) = \hat{\mathbb{P}}\hat{H}\psi(x,t)$$

Wenn $[\hat{\mathbb{P}},\hat{H}]=0 \Longrightarrow \hat{\mathbb{P}}\hat{H} = \hat{H}\hat{\mathbb{P}} \Longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\mathbb{P}}\psi) = \hat{H}(\hat{\mathbb{P}}\psi)$

Also, nehmen wir die gerade Funktion $\psi^{(+)}_{(x,t)} = \frac{1}{2}(1+\hat{\mathbb{P}})\psi(x,t)$
und $\psi^{(-)}(x,t) = \frac{1}{2}(1-\hat{\mathbb{P}})\psi$ (ungerade).

Dann $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{(+)}(x,t) = \psi^{(+)}(x,t)$$
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{(-)}(x,t) = \psi^{(-)}(x,t)$$

* Also Funktionen verschiedener Parität mischen nicht miteinander. Also die Parität bleibt konstant.

* Wir werden sehen (später), daß diese wichtige Bedingung ganz allgemein ist. Wenn ein Operator $\hat{O}$ erfüllt $[\hat{H},\hat{O}]=0$, dann bleiben die Eigenwerte von $\hat{O}$ konstant in der Zeit.

Das ist eine <u>sehr wichtige Eigenschaft</u>!

• <u>Impuls-Operator</u>

• Wir werden nun die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Impulsoperators diskutieren.

* In x-Darstellung: $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

* Die Eigenwertgleichung für $\hat{p}$ ist

$$\hat{p}\, u_p(x) = p\, u_p(x)$$

also $-i\hbar \frac{d}{dx} u_p(x) = p\, u_p(x) \Longrightarrow \frac{du_p}{u_p} = +i\, p/\hbar\, dx$

und deswegen: $u_p(x) = C\, e^{ipx/\hbar}$

wobei C eine Konstant ist

• Diese Funktionen erfüllen:

$$\int dx\, u_{p'}^*(x)\, u_p(x) = |C|^2 \int dx\, e^{i(p-p')x/\hbar} = 2\pi |C|^2 \hbar\, \delta(p-p')$$

Um zu normalisieren $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

- Also $u_p(x) = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

- Die Eigenwerte von $\hat{p}$ bauen kein diskreter Satz von Werten, sondern ein kontinuerliches Spektrum.

Deswegen, anstatt eine lineare Kombination (wie fürs Kasten) haben wir, daß eine beliebige Funktion $\psi(x)$ als ein Integral geschrieben werden kann:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \phi(p)\, \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

Also die Relation zwischen x- und p-Darstellung die wir schon kennen.

- In freien Raum $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

Ganz klar $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$, also p bleibt konstant in freien Raum $\Rightarrow$ wir mischen die verschieden p's nicht miteinander. p ist "gut definiert" in freien Raum.

* **NOTE** über Hermitische Operatoren die Kommutieren.

* Sei $\hat{A}$ und $\hat{B}$ Hermitische Operatoren

und $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

* Ich werde nun zeigen, daß wenn die Eigenwerte sind alle verschieden voneinander, dann die Eigenfunktionen von $\hat{A}$ sind auch Eigenfunktionen von $\hat{B}$.

* Sei ψ eine Eigenfunktion von $\hat{A}$: $\hat{A}\psi = a\psi$

Dann $\hat{B}\hat{A}\psi = \hat{B}(a\psi) = a\hat{B}\psi$

$ \parallel$

$ \hat{A}\hat{B}\psi$

Also $\hat{A}(\hat{B}\psi) = a(\hat{B}\psi)$

* Also $\hat{B}\psi$ ist auch eine ~~Eigen~~ Eigenfunktion von $\hat{A}$ mit Eigenwert a.

Da die Eigenvektoren mit verschieden Eigenwerte sind orthogonal, dann muß $\hat{B}\psi$ ein vielfach von ψ also $\hat{B}\psi = b\psi$, und damit ψ ist ebenfalls eine Eigenfunktion von $\hat{B}$.

* Man kann auch beweisen, daß wenn $\hat{A}$ und $\hat{B}$ dieselbe Eigenfunktionen haben, dann auf jedenfall $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$.

Sehen wir das:

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}[b\psi] = b[\hat{A}\psi] = ba\psi = b\hat{A}\psi = \hat{B}\hat{A}\psi \rightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$