* Der harmonische Oszillator andersum: Die Leiteroperatoren

* Wir haben schon gesehen, daß der harmonische Oszillator durch den Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

gegeben wird, wobei $\hat{p}$ und $\hat{x}$ Operatoren sind.

* Wir werden mit Hilfe des harmonischen Oszillators sehr wichtige Ideen über Operatoren in der Quantenmechanik einführen.

* Klassisch gesehen:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \omega\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}\right]\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}\right]$$

Aber quantenmechanisch ist das nicht genau so:

$$\omega\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, \hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}\right]\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, \hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}}\right] =$$

$$= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 - \frac{i\omega}{2}(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) \overset{\text{da } [\hat{p},\hat{x}] = -i\hbar}{=\!=}$$

$$= \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega$$

* Wir führen nun die folgenden Operatoren ein:

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, \hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} \longrightarrow \underline{\text{ABSTEIGE-OPERATOR}}$$

$$\hat{A}^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, \hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} \longrightarrow \underline{\text{AUFSTEIGE-OPERATOR}}$$

Wir werden später sehen, warum diese Operatoren so heißen.

BEMERKUNG (I): HERMITISCH KONJUGIERTE OPERATOR

Die Schreibweise $\hat{A}^\dagger$ (sprich A-Kreuz) heißt der zu $\hat{A}$ hermitisch konjugierte Operator, und ist durch folgende Beziehung definiert:

$$\int dx \left[\hat{A}\psi(x)\right]^* \psi(x) = \int dx\, \psi^*(x)\, \hat{A}^\dagger \psi(x)$$

z.B. sei $\hat{O} = \frac{\partial}{\partial x}$

$$\int dx \left[\hat{O}\psi(x)\right]^* \psi(x) = \int dx \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x}\psi(x) = \underbrace{\cancel{\int dx \frac{\partial}{\partial x}[\psi^*\psi]}}_{0} - \int dx\, \psi^* \frac{\partial}{\partial x}\psi$$

$$= \int dx\, \psi^* \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi$$

NOTE: $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$

$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$

Also $\hat{O}^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}$

z.B. $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \hat{p}^\dagger = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

Also $\hat{p} = \hat{p}^\dagger \longrightarrow \hat{p}$ ist ein Beispiel von hermitischen Operator.

Für einen hermitischen Operator gilt $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$.

z.B. $\hat{x}, \hat{p}, \hat{H}$ und $\hat{\mathbb{P}}$ (Paritätsoperator) sind alle hermitisch.

Wir haben schon über die Hermitische Operatoren geredet.

BEMERKUNG (II): DIRACSCHE SCHREIBWEISE

· Wir werden von nun an folgende (Diracsche) Schreibweise benutzen:

$$\int \Phi^*(x)\, \hat{A}\, \psi(x)\, dx = \underbrace{\langle \Phi |}_{\text{BRA}}\, \hat{A}\, \underbrace{| \psi \rangle}_{\text{KET}}$$

• Auch werden wir das Skalarprodukt von 2 Funktionen so schreiben:

$$\int \phi^*(x)\,\psi(x)\,dx = \langle \phi | \psi \rangle$$

* Diese Schreibweise ist besonders nützlich, um lange Gleichungen zu vereinfachen. (Später werden wir etwas mehr über BRA-KET Schreibweise lernen)

---

* Wir kehren nun zu den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{A}^+$ zurück.

$\hat{A}$ und $\hat{A}^+$ kommutieren nicht:

$$[\hat{A}, \hat{A}^+] = \hbar$$

* Wir können also den Hamilton-Operator durch die beiden neuen Operatoren ausdrücken:

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \omega\,\hat{A}^+\hat{A}}$$

* Schreiben wir nun die Eigenwertgleichung an:

$$\hat{H} u_E = E u_E$$

$$[\hat{H}, \hat{A}] = \left[\frac{\hbar\omega}{2} + \omega\,\hat{A}^+\hat{A}, \hat{A}\right] = \omega\,[\hat{A}^+, \hat{A}]\,\hat{A} = -\hbar\omega\,\hat{A}$$

Also

$$\left.\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{A}]\,u_E &= -\hbar\omega\,\hat{A}\,u_E \\ &\ \| \\ \hat{H}\hat{A}u_E - \hat{A}\hat{H}u_E &= \hat{H}(\hat{A}\,u_E) - E(\hat{A}u_E) \end{aligned}\right\} \hat{H}[\hat{A}u_E] = (E - \hbar\omega)[\hat{A}u_E]$$

Diese Gleichung sagt uns, daß wenn u_E ein Eigenzustand von $\hat{H}$ mit dem Eigenwert E ist, dann so ist $\hat{A}u_E$ ebenfalls ein Eigenzustand von $\hat{H}$, hat aber den Eigenwert $E - \hbar\omega$.

* Der Eigenwert wurde also um die Energieeinheit

$$\varepsilon = \hbar\omega$$

erniedrigt. Wir dürfen also schreiben

$$\hat{A} u_E = C(E)\, u_{E-\varepsilon}$$

wobei $C(E)$ eine Konstante ist.

(<u>BEMERKUNG</u>: $\langle u_E | u_E \rangle = 1$ wegen Normierung)

. Wenden wir $[\hat{H}, \hat{A}]$ auf $u_{E-\varepsilon}$ an, so finden wir in der gleichen Weise wie vorher, daß $\hat{A} u_{E-\varepsilon}$ (also $\hat{A}^2 u_E$) einen Zustand der Energie $E - 2\varepsilon$ ergibt. Durch wiederholte Anwendung des Operators $\hat{A}$ auf irgendein u_E können wir also Zustände von immer geringerer Energie erzeugen. Deswegen heißt $\hat{A}$ <u>Absteige-Operator</u> (oder auch <u>Abwärts-Operator</u>).

* Da $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$, muß $\hat{H}$ immer einen positiven Erwartungswert haben. Das bedeutet, daß $\hat{A}$ nicht beliebig oft angewendet werden kann. Somit müßen unsere Abwärtsschritte irgendwo zu Ende sein und ein Grundzustand existieren. Wir bezeichnen diesen Zustand mit u_0, und dort endigt die Absteigeprozedur:

$$\hat{A} u_0 = 0$$

* Also $\hat{H} u_0 = \left(\omega \hat{A}^{+} A + \frac{\hbar\omega}{2}\right) u_0 = \frac{\hbar\omega}{2} u_0$

· Wie wir schon gesehen haben, ist die Energie des Grundzustands nicht Null (Null-punkt Energie).

* Ebenfalls $[\hat{H}, \hat{A}^+] = \hbar\omega \hat{A}^+$

also
$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{[\hat{H}, \hat{A}^+]}_{\hat{H}\hat{A}^+ u_0 - \hat{A}^+ \underbrace{H u_0}_{\frac{\hbar\omega}{2} u_0}} u_0 = \hbar\omega \hat{A}^+ u_0 \end{array}\right\} \hat{H}\hat{A}^+ u_0 = (\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2})\hat{A}^+ u_0$$

* Also durch die Anwendung von $\hat{A}^+$ wurde die Energie um eine Einheit $\varepsilon = \hbar\omega$ erhöht. Deshalb bezeichnen wir $\hat{A}^+$ als <u>Aufsteige-Operator</u> (auch <u>Aufwärts-Operator</u>).

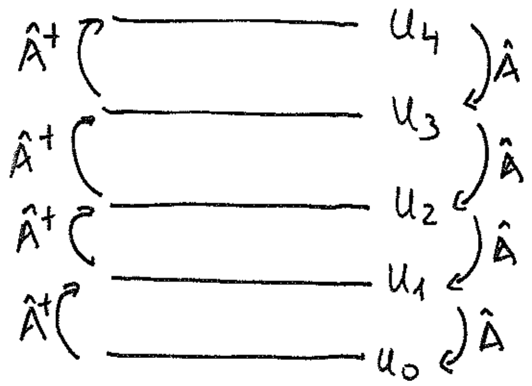
* Wir ändern nun unsere Bezeichnungsweise ein wenig. Wir indizieren den Zustand mit derjenigen Zahl, die angibt, um wieviele Einheiten $\varepsilon = \hbar\omega$ es oberhalb der Grundzustandsenergie $\hbar\omega/2$ liegt.

Also u_0 ; $u_1 \equiv u_\varepsilon$; $u_2 \equiv u_{2\varepsilon}$; ...

Deswegen $\hat{A}^+ u_0 = C\, u_1$ wobei $C \equiv$ Konstante

$\hat{A}\, u_1 = C'\, u_1$ wobei $C' \equiv$ Konstante

Somit bewegen wir uns mit $\hat{A}^+$ und $\hat{A}$ auf einer "Leiter" auf und abwärts.



Man nennt $\hat{A}^+$ und $\hat{A}$ deshalb

<u>LEITEROPERATOREN</u>

* Eine Folge davon ist, daß wir folgendes Energiespektrum erhalten: $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ (also wie wir schon kennen). $n = 0, 1, 2, \ldots$

* Mit den Leiteroperatoren können wir ebenfalls eine allgemeine Darstellung der Eigenvektoren erhalten:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{\hat{A}^+}{\sqrt{\hbar}}\right)^n u_0}$$

wobei schon die richtige Normierungskonstante eingesetzt wurden. Sehen wir das:

$$\hat{A}^+ u_0 = \tilde{C}_1 u_1 \qquad \text{wobei } \tilde{C}_1 = \text{konstant}$$

$$\hat{A}^+ u_1 = \tilde{C}_2 u_2 \Rightarrow \hat{A}^+(\hat{A}^+ u_0) = (\hat{A}^+)^2 u_0 = \tilde{C}_1 \cdot \tilde{C}_2 u_2 = C_2 u_2$$

$$\vdots$$

$$(\hat{A}^+)^n u_0 = C_n u_n$$

* Wir wollen $\langle u_n | u_n \rangle = 1$

Also $|C_n|^2 \langle u_n | u_n \rangle = (\langle u_n | C_n^*)(C_n | u_n \rangle) =$

$$= \langle (\hat{A}^+)^n u_0 | (\hat{A}^+)^n u_0 \rangle = \langle u_0 | \hat{A}^n (\hat{A}^+)^n | u_0 \rangle$$

<u>Bemerkung</u>: $\langle (\hat{A}^+)^n u_0 | (\hat{A}^+)^n u_0 \rangle = \int dx \, [(\hat{A}^+)^n u_0]^* [(\hat{A}^+)^n u_0] \overset{\text{Definition von } \hat{A}^+}{=}$

$$= \int dx \, u_0^* (\hat{A})^n (\hat{A}^+)^n u_0 = \langle u_0 | (\hat{A}^n)(\hat{A}^+)^n | u_0 \rangle$$

* Da $[\hat{A}, \hat{A}^+] = \hbar \longrightarrow \hat{A}^n (\hat{A}^+)^n = \hat{A}^{n-1} (\hat{A}\hat{A}^+)(\hat{A}^+)^{n-1} =$

$$= \hat{A}^{n-1}\{\hbar + \hat{A}^+\hat{A}\}(\hat{A}^+)^{n-1} = \hat{A}^{n-1}\hbar(\hat{A}^+)^{n-1} + \hat{A}^{n-1}\hat{A}^+(\hat{A}\hat{A}^+)(\hat{A}^+)^{n-2}$$

$$= \hat{A}^{n-1}2\hbar(\hat{A}^+)^{n-1} + \hat{A}^{n-1}(\hat{A}^+)^2(A\hat{A}^+)(\hat{A}^+)^{n-3} = \cdots\cdot$$

$$\cdots = \hat{A}^{n-1}n\hbar(\hat{A}^+)^{n-1} + \hat{A}^{n-1}(\hat{A}^+)^n\hat{A}$$

Da $\hat{A}u_0 = 0$, dann

$$\langle u_0|(\hat{A}^n)(\hat{A}^+)^n|u_0\rangle = \langle u_0|\hat{A}^{n-1}n\hbar(\hat{A}^+)^{n-1}|u_0\rangle$$

$$= n\hbar\underbrace{\langle u_0|\hat{A}^{n-1}(\hat{A}^+)^{n-1}|u_0\rangle}_{|c_{n-1}|^2}$$

Also $|c_n|^2 = n\hbar|c_{n-1}|^2 = n\hbar(n-1)\hbar|c_{n-2}|^2 = \cdots$

$$\cdots = n!(\hbar)^n|c_0|^2 = n!(\hbar)^n$$

Also $c_n = \sqrt{n!\hbar^n}$ (wir wählen $c_n \in \mathbb{R}$ ohne Verlust an Allgemeingültigkeit)

Also $u_n = \frac{1}{\sqrt{n!\hbar^n}}(\hat{A}^+)^n u_0 \Rightarrow$ wie wir beweisen wollten.

* Man kann ganz einfach die Orthogonalität der zu verschiedenen Energien gehörenden Eigenzustände beweisen

$$\langle u_m | u_n \rangle = 0 \qquad m \neq n$$

BEWEIS: $\langle u_m | u_n \rangle \overset{\text{wie vorher}}{\sim} \langle u_0 | \hat{A}^m (\hat{A}^+)^n | u_0 \rangle$ (außer Konstanten)

Wie vorher: $\hat{A}^m (\hat{A}^+)^n = \hat{A}^{m-1} n\hbar (\hat{A}^+)^{n-1} + \hat{A}^{m-1} (\hat{A}^+)^n A$

Also: $\langle u_0 | \hat{A}^m (\hat{A}^+)^n | u_0 \rangle = \langle u_0 | \hat{A}^{m-1} n\hbar (\hat{A}^+)^{n-1} | u_0 \rangle$

Sei $m > n$ ⟶ wir wiederholen n Mal bis wir

$$\langle u_0 | \hat{A}^{m-n} n! \hbar^n | u_0 \rangle \text{ kriegen.}$$

Aber $\langle u_0 | \hat{A}^{m-n} | u_0 \rangle = 0$ (denn $\hat{A} u_0 = 0$)

Sei $m < n$ ⟶ wir wiederholen m Mal bis wir:

$$\frac{n!}{m!} \hbar^{m} \langle u_0 | (\hat{A}^+)^{n-m} | u_0 \rangle \text{ kriegen.}$$

Aber $\langle u_0 | (\hat{A}^+)^{n-m} | u_0 \rangle = \langle u_0 (\hat{A}^+)^{n-m} | u_0 \rangle = \int dx\, u_0^* (\hat{A}^*)^{n-m} u_0 = 0$

Also wenn $m \neq n$ ⟶ $\langle u_m | u_n \rangle = 0$ wie wir beweisen wollten.

· Es ist also möglich die Lösung für die Eigenwerte des harmonischen Oszillators allein mit Operatormethoden zu finden. Alles was man braucht, um die Eigenzustände zu spezifizieren, ist die Energie (also die ganze Zahlen $n = 0, 1, 2 \ldots$). Der Index n am Eigenzustand u_n beschreibt also dessen gesamten Inhalt.

* Wir können den Zustand u_n in x-Raum ($u_n(x)$) oder p-Raum ($u_n(p)$) [oder irgendanderen Raum] darstellen.

* Eine Sache ist der Zustand, und eine andere Sache ist die spezifische Darstellung. Das ist relativ wichtig, und wir sollten das genauer ansehen.

Nehmen wir ein Zustand ψ.

Wir wissen schon, daß $|\psi(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Ausfinden des Teilchens am Ort x ergibt. Wir können das folgendermaßen interpretieren: $\psi(x)$ ist der Entwicklungs-Koeffizient eines beliebigen, abstrakten Zustands (ψ) in der Entwicklung nach Eigenzuständen des <u>Ortsoperators</u> $\hat{X}$:

$$\hat{X}\phi_x = x\phi_x \qquad \left(\begin{array}{c}\phi_x \to \text{Eigenzustand von } \hat{x} \text{ mit} \\ \text{Eigenwert } x\end{array}\right)$$

Das Eigenwertspektrum des hermitischen Operators $\hat{x}$ ist kontinuierlich (also nicht diskret wie für den harmonischen Oszillator), so daß der Entwicklungssatz lautet:

$$\psi = \int dx\, \psi(x)\, \phi_x \qquad \text{wobei} \quad \langle \phi_x | \phi_{x'} \rangle = \delta(x-x')$$

$$\boxed{\psi(x) = \langle \phi_x | \psi \rangle}$$

Also die Messung der Observablen $\hat{x}$ ergibt den Eigenwert x mit der Wahrscheinlichkeit $|\psi(x)|^2$

* Ebenfalls könnten wir ψ nach Eigenzuständen des Impulsoperators $\hat{p}$ entwicklen: $\hat{p}\phi_p = p\,\phi_p$

Zusammenfassung letzter Vorlesung

* Leiteroperatoren

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,\hat{x} + i\,\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} \quad \leftarrow \text{Absteige-Operator}$$

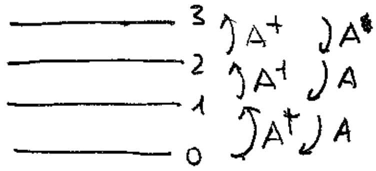
$$\hat{A}^{+} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\,\hat{x} - i\,\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} \quad \leftarrow \text{Aufsteige-Operator}$$

$$[A, A^{+}] = \hbar$$

$$\hat{H} = \omega \hat{A}^{+}\hat{A} + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\hat{H} u_E = E u_E \;\begin{cases} \nearrow \hat{H}(\hat{A} u_E) = (E - \hbar\omega)(\hat{A} u_E) & \leftarrow \text{Absteigen} \\ \searrow \hat{H}(\hat{A}^{+} u_E) = (E + \hbar\omega)(\hat{A}^{+} u_E) & \leftarrow \text{Aufsteigen} \end{cases}$$

- Grundzustand $\rightarrow u_0 \longrightarrow A u_0 = 0 \longrightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$
- $E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \longrightarrow$ LEITER $\longrightarrow$



Leiteroperatoren

- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\hat{A}^{+}}{\sqrt{\hbar}}\right)^{n} u_0$

* Hermitisch-Konjugiert

- $\hat{A} \longrightarrow \hat{A}^{+}$ ($\hat{A}$-~~Kreuz~~) $\Longrightarrow \int dx\,[\hat{A}\psi(x)]^{*}\psi(x) = \int dx\,\psi(x)^{*}\,\hat{A}^{+}\psi(x)$
- Hermitische Operatoren: $\hat{O} = \hat{O}^{+}$ (z.B. $\hat{x}, \hat{p}, \hat{H}, \hat{\mathbb{P}}$)
- $(\hat{A}^{+})^{+} = \hat{A}$
- $(\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$

* Diracsche Schreibweise

$\langle\phi| \equiv$ BRA

$|\psi\rangle \equiv$ KET

- $\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = \int \phi(x)^{*}\,\hat{A}\,\psi(x)\,dx$
- Skalar-produkt $\rightarrow \langle\phi|\psi\rangle = \int \phi(x)^{*}\psi(x)\,dx$

* Zustand vs. Darstellung

- Zustand ψ
- $\hat{x}$-Operator $\longrightarrow \hat{x}\phi_x = x\,\phi_x$ (Eigenzustände von $\hat{x}$)

  $\searrow \psi = \int \psi(x)\,\phi_x\,dx \leftarrow$ Entwicklung von ψ nach Eigenzustände von $\hat{x}$.

  $\leftarrow \psi(x) \rightarrow$ Wellenfunktion in der x-Darstellung
- $\hat{p}$-Operator $\rightarrow \hat{p}\phi_p = p\,\phi_p$

  $\searrow \psi = \int \psi(p)\,\phi_p\,dp \leftarrow \psi(p) \leftarrow$ Wellenfunktion in der p-Darstellung also: $\psi = \int dp\, \psi(p) \phi_p$ wobei $\psi(p) = \langle \phi_p | \psi \rangle$

* Die grundlegenden Prinzipien befassen sich mit Operatoren und ihren Eigenvektoren und Eigenwerten in einem abstrakten KET-Raum (sogen. Hilbert-Raum), alles andere ist nur eine Sache der Darstellung. ($\underset{\text{KET}}{|\psi\rangle} \longrightarrow$ DARSTELLUNG $\langle \phi_x | \psi \rangle$; DARSTELLUNG $\langle \phi_p | \psi \rangle$ ...)

- HEISENBERG-BILD. DIE HEISENBERG-GLEICHUNG

- Wir werden nun die zeitliche Entwicklung eines Systems in unserer darstellungsunabhängigen Weise studieren.
- Nehmen wir die t-abhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \hat{H} \psi(t)$$

Die Gleichung kann leicht gelöst werden:

$$\psi(t) = \exp[-i\hat{H}t/\hbar]\, \psi(0)$$

wobei $\psi(0)$ der Zustand zur Zeit $t=0$ ist.

- Die Zeitentwicklung wird durch den Operator $e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ gegeben.

Dieser Operator ist folgendermaße definiert:

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[-i\hat{H}t/\hbar\right]^n$$ (also durch den Taylor-Entwicklung)

- Wir sind nun an der Zeitentwicklung des Erwartungswertes irgendeines Operators $\hat{A}$ interessiert:

$$\langle A\rangle_t = \langle \underset{t\text{-abhäng.}}{\psi(t)} | \underset{t\text{-unabh.}}{\hat{A}(0)} | \psi(t)\rangle = \langle e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(0)|\hat{A}(0)\, e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(0)\rangle$$

$$\overset{*(\text{I})}{=} \langle\psi(0)|\, e^{+i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,|\psi(0)\rangle$$

$$= \langle\psi(0)|\, \underset{t\text{-abhäng.}}{\hat{A}(t)}\,|\underset{t\text{-unabh.}}{\psi(0)}\rangle$$

Ein t-unabhängiger Operator $\hat{A}(0)$ liefert in seiner Wirkung auf einen t-abhängigen Zustand $\psi(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(0)$ einen Erwartungswert, der geschrieben werden kann als der Erwartungswert eines zeitabhängigen Operators $\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}\, e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ im t-unabhängigen Zustand $\psi(0)$. Wenn wir dies tun, so arbeiten wir im HEISENBERG-BILD. Belassen wir aber $\hat{A}$ ohne Zeitabhängigkeit, so arbeiten wir im SCHRÖDINGER-BILD. *Dies sind 2 gleichgültige Darstellungen der Quantenmechanik.*

- *Wenn wir im Heisenberg-Bild arbeiten, so sind die Zustandsvektoren fest. Wie sich eine Observable $\hat{A}$ mit der Zeit verändert haben wir schon gesehen:*

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

also

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{i\hat{H}t/\hbar}\right)\hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar} + e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}(0)\frac{d}{dt}\left[e^{-i\hat{H}t/\hbar}\right]$$

$$= i\frac{\hat{H}}{\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar} - \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{H}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left\{\hat{H}\hat{A}(t) - \hat{A}(t)\hat{H}\right\}$$

Also

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}(t)]}$$

Das ist die sogen. *HEISENBERG-GLEICHUNG*

$*(\text{I})$: $\langle e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(0)|\phi\rangle = \int dx\, [e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi(0)]^*\phi(x) =$

$$= \int dx\, \psi^*(0)\, [e^{-i\hat{H}t/\hbar}]^\dagger \phi(x) = \int dx\, \psi^*(0)\, e^{i\hat{H}^\dagger t/\hbar}\phi(x) \overset{H=H^\dagger}{=}$$

$$= \int dx\, \psi^*(0) e^{i\hat{H}t/\hbar}\phi(x) = \langle\psi(0)|e^{i\hat{H}t/\hbar}|\phi\rangle$$

* Die Heisenberg-Gleichung spielt dieselbe Rolle im Heisenberg-Bild wie die Schrödinger-Gleichung im Schrödinger-Bild.

* z.B. für den harmonischen Oszillator:

$$\hat{H} = \omega \hat{A}^+ \hat{A} + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$\hat{H}$ ist eine Konstante der Bewegung (die Energie bleibt natürlich erhalten), also

$$\hat{H} = \omega \hat{A}^+(t)\, \hat{A}(t) + \frac{\hbar\omega}{2}$$

ebenfalls $[\hat{A}(t), \hat{A}^+(t)] = \hbar$ (Der Beweis ist ganz einfach → ÜBUNG)

* Dann:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}(t)] = \frac{i\omega}{\hbar}[\hat{A}^+(t), \hat{A}(t)]\, \hat{A}(t) = -i\omega \hat{A}(t)$$

Ebenfalls:

$$\frac{d}{dt}\hat{A}^+(t) = i\omega \hat{A}^+(t)$$

· Also

$$\hat{A}(t) = e^{-i\omega t}\hat{A}(0)$$

$$\hat{A}^+(t) = e^{i\omega t}\hat{A}^+(0)$$

Da

$$\left.\begin{aligned} \hat{A} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} \\ \hat{A}^+ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{A} + \hat{A}^+) \\ \hat{p} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(\hat{A} - \hat{A}^+) \end{aligned}$$

Dann

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}[\hat{A}(t) + \hat{A}^+(t)] = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}[\hat{A}(0)e^{-i\omega t} + \hat{A}^+(0)e^{i\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \left\{ \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, \hat{x}(0) + \frac{i}{\sqrt{2m\omega}} \hat{p}(0) \right] e^{-i\omega t} + \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\, \hat{x}(0) - i \frac{\hat{p}(0)}{\sqrt{2m\omega}} \right] e^{i\omega t} \right\}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \hat{x}(0) + \frac{i}{2m\omega} \hat{p}(0) \right] e^{-i\omega t} + \left[\frac{1}{2} \hat{x}(0) - \frac{i}{2m\omega} \hat{p}(0) \right] e^{i\omega t}$$

$$= \hat{x}(0) \left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right] + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega} \left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right]$$

$$= \cos\omega t \; \hat{x}(0) + \sin\omega t \; \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}$$

Also $\hat{x}(t) = \hat{x}(0) \cos\omega t + \hat{p}(0) \dfrac{\sin\omega t}{m\omega}$

* Und ähnlicherweise:

$$\hat{p}(t) = \hat{p}(0) \cos\omega t - \hat{x}(0)\, m\omega \sin\omega t$$

---

* Die Wahl zwischen beide Bilder (Heisenberg oder Schrödinger) steht frei. Egal welche dieser Darstellungen wir benützen, das Ergebnis muß gleich bleiben.

BEMERKUNG

* DIRACSCHE SCHREIBWEISE (BRA UND KET): MATRIX-DARSTELLUNG DER QUANTENMECHANIK

* Wie gesagt eine Sache ist der Zustand eines Systems und eine andere Sache ist der spezifische Darstellung, die wir anwenden.
* Wir können die Diracsche-Schreibweise, um das ein bisschen deutlicher zu machen.

Wir asozieren zu jedem Zustand ein ket $|\psi\rangle$. $|\psi\rangle$ funktioniert wie ein Vektor in einem abstrakten Vektorraum, wie wir später sehen werden.

- Man definiert der Skalarprodukt 2 Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ als

$\langle\phi|\psi\rangle = \int dx\, \phi^*(x)\psi(x)$ (das haben wir schon gesehen)

- Die Operatoren bringen ein ket in einem anderen ket

$$\hat{O}|\psi\rangle = |\phi\rangle$$

- Also $\langle\varphi|\hat{O}|\psi\rangle = \int \varphi^*(x)\,\hat{O}\psi(x)\,dx$

Definition von $\hat{O}^+$

$$\langle\varphi|\hat{O}^+|\psi\rangle = \int \varphi^*\,\hat{O}^+\psi(x)\,dx = \int dx\,[\hat{O}\varphi(x)]^*\psi^* =$$

$$= \int dx\,\psi^*[\hat{O}\varphi(x)]^* = \langle\psi|\hat{O}|\varphi\rangle^*$$

- Sei $\{|u_k\rangle\}$ eine Basis von Eigenzustände eines hermitischen Operators

Jeder Zustand $|\psi\rangle$ kann als Linearkombination der Elemente der Basis ausgedrückt werden:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k|u_k\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Vektor-Schreibweise.}$$

* Wie räpresentieren wir $\langle\psi|$?

Sehen wir das.

* $|\psi\rangle = \sum_k c_k |u_k\rangle \longrightarrow c_k = \langle u_k|\psi\rangle$

Also $|\psi\rangle = \sum_k |u_k\rangle\langle u_k|\psi\rangle \longrightarrow \boxed{\sum_k |u_k\rangle\langle u_k| \equiv \hat{\mathbb{1}}}$

* Das sagt uns sofort, daß $\langle u_k|u_{k'}\rangle = \delta_{kk'}$

* Dann $\langle\psi| = \sum_k \langle\psi|u_k\rangle\langle u_k| = \sum_k c_k^* \langle u_k|$

· Also : $\langle\psi|\phi\rangle = \sum_k c_k^* \tilde{c}_k$ wobei $|\psi\rangle = \sum_k c_k |u_k\rangle$, $|\phi\rangle = \sum_k \tilde{c}_k |u_k\rangle$

Also $\langle\psi| \equiv (c_1^*, \dots, c_k^*, \dots)$

* Wir wissen, daß $\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$

$$\sum_k |u_k\rangle\langle u_k|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_k |u_k\rangle\langle u_k|\phi\rangle$$

sei $|\phi\rangle = \sum_{k'} \tilde{c}_{k'}|u_{k'}\rangle$, $|\psi\rangle = \sum_{k'} c_{k'}|u_{k'}\rangle$

$$\tilde{c}_k = \langle u_k|\phi\rangle = \sum_{k'} \langle u_k|u_{k'}\rangle \langle u_{k'}|\hat{A}|\psi\rangle$$

$$= \sum_{k'} \underbrace{\langle u_k|u_{k'}\rangle}_{\delta_{kk'}} \sum_{k''} \langle u_{k'}|\hat{A}|u_{k''}\rangle\langle u_{k''}|\psi\rangle$$

$$= \sum_{k''} \langle u_k|\hat{A}|u_{k''}\rangle c_{k''}$$

Also $\tilde{c}_k = \sum_{k''} \underbrace{\langle u_k|\hat{A}|u_{k''}\rangle}_{\text{das ist wie eine Matrix } A_{kk''}} c_{k''}$

(Bemerkung: $\langle u_k|\hat{A}^+|u_{k'}\rangle = \langle u_{k'}|\hat{A}|u_k\rangle^*$
Also $(\hat{A}^+)_{kk'} = (\hat{A})^*_{k'k}$
Also wenn man die Matrix $\hat{A}$ transponiere und komplex-konjugiere, bekommt man $\hat{A}^+$)

· Also wir können |Zustände als Vektoren / Operatoren als Matrizen| räpresentieren

· Das ist die sogen. Matrix-Darstellung der Q-Mechanik.

* Mit der Diracsche Schreibweise können wir die Idee von Zustand vs. Darstellung deutlicher machen.

  - Zustand $|\psi\rangle$
  - Komplette Satz von Zustände $|\phi_n\rangle$ (z.B. die Eigenzustände von $\hat{H}$)
    - Orthonormalität der Basis $\rightarrow$ $\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \hat{\mathbb{1}}$
    - Also $|\psi\rangle = \hat{\mathbb{1}}|\psi\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle = \sum_n \underbrace{\langle\phi_n|\psi\rangle}_{\psi_n} |\phi_n\rangle$
    - $\psi_n \rightarrow$ Darstellung von $|\psi\rangle$ in der $\{|\phi_n\rangle\}$ Basis.
  - z.B. $\rightarrow$ Zustände $|x\rangle$ $\rightarrow$ Eigenzustände von $\hat{x}$: $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$
    - Orthonormalität der Basis: $\int dx\ |x\rangle\langle x| = \hat{\mathbb{1}}$
      (anstatt Summe $\rightarrow$ Integral)
    - Dann: $|\psi\rangle = \int dx\ |x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} |x\rangle$
    - $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \longrightarrow$ Darstellung von $|\psi\rangle$ in der $\{|x\rangle\}$ Basis
      (also die x-Darstellung).

- Also die verschiedene Darstellungen eines Zustands sind nicht mehr als die Projektionen dieses Zustand auf verschiedenen Basis. Ähnlich wie die verschiedene Darstellungen eines Vektors in verschiedenen Koordinatensysteme.

* **BEMERKUNG**: DIE UNSCHÄRFERELATIONEN UND DIE NICHT-KOMMUTATIVE OPERATOREN (Ableitung der Unschärferelationen)

* Man definiert die Varianz eines Operators

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$$

* Nehmen wir noch ein Operator $\hat{B}$.

Sei $\hat{U} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$
$\hat{V} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$ } die beschreiben die Abweichungen der Operatoren von den Erwartungswerte.

* Sei ψ eine Funktion.
Wir betrachten die folgende Kombination:

$$\phi = \hat{U}\psi + i\lambda \hat{V}\psi \quad \text{wobei } \lambda \equiv \text{Konstante}$$

Damit ist:

$$I(\lambda) = \int dx\, \phi^* \phi \geq 0$$

(das ist klar weil $|\phi|^2 \geq 0$)

* Sind $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitisch, so sind es auch $\hat{U}$ und $\hat{V}$.

Dann:

$$I(\lambda) = \int dx \left[\hat{U}\psi + i\lambda \hat{V}\psi\right]^* \left[\hat{U}\psi + i\lambda \hat{V}\psi\right]$$

$$= \int dx \left\{ (\hat{U}\psi)^*(\hat{U}\psi) + \lambda^2 (\hat{V}\psi)^*(\hat{V}\psi) + i\lambda\left[(\hat{U}\psi)^*(\hat{V}\psi) - (\hat{V}\psi)^*(\hat{U}\psi)\right] \right\}$$

$$= \int dx\, \psi^* \left[\hat{U}^2 + \lambda^2 \hat{V}^2 + i\lambda [\hat{U}, \hat{V}]\right] \psi$$

Man sieht einfach daß,

$$\langle \hat{U}^2 \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = (\Delta \hat{A})^2$$

Also $I(\lambda) = (\Delta \hat{A})^2 + \lambda^2 (\Delta \hat{B})^2 + i\lambda \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$

· Das Minimum wird erreicht für (differenzieren nach λ)

$$2\lambda (\Delta B)^2 + i \langle [A,B] \rangle = 0 \longrightarrow \lambda = -i \frac{\langle [A,B] \rangle}{2(\Delta B)^2}$$

Also der minimale Wert von $I(\lambda)$ ist :

$$(\Delta \hat{A})^2 - \frac{\langle [A,B] \rangle^2}{4(\Delta B)^2} + \frac{\langle [A,B] \rangle^2}{2(\Delta B)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta \hat{A})^2 (\Delta \hat{B})^2 \geq \frac{1}{4} \langle i[A,B] \rangle^2}$$

z.B : $\left.\begin{matrix} \hat{A} = \hat{x} \\ \hat{B} = \hat{p} \end{matrix}\right\} (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \longrightarrow \boxed{(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar/2}$

* Also in Allgemeine [redacted] dürfen wir die Werten von 2 Observablen gleichzeitig unbeliebig genau nicht bestimmen, wenn die beide Observablen nicht kommutieren. Das passiert für $\hat{x}$ und $\hat{p}$, aber auch für viele andere Operatoren.