• DIE ZUSAMMENSETZUNG VON DREHIMPULSEN

• Wir haben schon mehrmal erwähnt, daß Drehimpuls-Operators eine sehr wichtige Rolle spielen. Manchmals spielen mehr als eine (sic) von Drehimpuls-Operator eine wichtige Rolle. In diesen Fälle muß man die verschiedene Drehimpulse kombinieren. Wir werden erstmal ein Paar Beispiele sehen.

① Nehmen wir 2 Teilchen mit Koordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Erstmal betrachten wir die Teilchen als unabhängig voneinander. Dann, der Hamilton Operator ist:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \qquad \text{wobei} \quad \hat{H}_i = \frac{-\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + V(r_i) \qquad i = 1,2$$

(das Potential $V(r)$ ist zentral)

Sei $\{\hat{L}_{ix}, \hat{L}_{iy}, \hat{L}_{iz}\}$ der Drehimpuls-Operator assoziiert zu dem i-Teilchen. Da $V(\vec{r}) = V(r)$, dann $[\hat{L}_{iz}, \hat{H}_i] = 0$ (auch für $\hat{L}_{ix}$ und $\hat{L}_{iy}$). Ebenfalls $[\hat{L}_{iz}, \hat{H}_{i'}] = 0$ wobei $i' \neq i$, da die beinflußen verschiedene Teilchen.

Also $[\hat{L}_{iz}, \hat{H}_0] = 0$

und ebenfalls $[\hat{L}_i^2, \hat{H}_0] = 0$

• Also $\{\hat{L}_1^2, \hat{L}_{1z}, \hat{L}_2^2, \hat{L}_{2z}\}$ Kommutiert miteinander und mit $\hat{H}_0$ und deswegen die Entsprechende Eigenzustände bauen eine gute Basis für die Beschreibung des Systems.

- Nehmen wir jetzt aber an, daß es noch ein zusätzliches Term in dem Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \underbrace{V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}$$

→ Wechselwirkung zwischen den Teilchen.

Nun: $[\hat{L}_{1z}, \hat{H}] = [\hat{L}_{1z}, V] = -i\hbar \left[x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, V \right]$

$$= -i\hbar \left[x_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} \right] \neq 0$$

Also nun $[\hat{L}_{1z}, \hat{H}] \neq 0 \longrightarrow \hat{L}_{1z}$ ist nicht mehr ein gutes Observable des Systems.

- *Das gleiche gilt für $\hat{L}_{2z}$.*
- Aber $\hat{L}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$ erfüllt doch $[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$.

Ganz klar $[\hat{L}_z, \hat{H}_0] = 0$. Wir werden nun sehen, daß $[\hat{L}_z, V] = 0$:

$$[\hat{L}_z, V] = [\hat{L}_{1z}, V] + [\hat{L}_{2z}, V] = -i\hbar \left\{ x_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial V}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\}$$

Aber $V = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V\left[\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2} \right]$

Let $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, dann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial y_1} = \dfrac{\partial r}{\partial y_1} \dfrac{dV}{dr} = \dfrac{(y_1 - y_2)}{r} \dfrac{dV}{dr} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y_2} = \dfrac{\partial r}{\partial y_2} \dfrac{dV}{dr} = \dfrac{-(y_1 - y_2)}{r} \dfrac{dV}{dr} \end{cases}$$

Dann:

$$[\hat{L}_z, V] = -i\hbar \left[\frac{x_1 (y_1 - y_2)}{r} - \frac{y_1 (x_1 - x_2)}{r} - \frac{x_2 (y_1 - y_2)}{r} + \frac{y_2 (x_1 - x_2)}{r} \right] \frac{d}{dr} V$$

$$= 0$$

* Ebenfalls $[\hat{L}_x, \hat{H}] = [\hat{L}_y, \hat{H}] = 0$

$$[\hat{L}^2, \hat{H}] = 0 \qquad (\text{wobei } \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2)$$

* Also wenn wir 2 Teilchen haben, die durch ~~eine~~ Potential wechselwirken, das nur von der relativen Abstand abhängig ist, dann bleib die Summe der Drehimpulsen $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$ erhaltet, und nicht die individuelle $\hat{L}_1$ und $\hat{L}_2$.

~~[illegible]~~

② Es ist nicht notwendig, 2 Teilchen zu haben, um 2 verschiedene Drehimpulse zu haben. Ein Elektron in einem Atom hat 2 verschiedene Drehimpulse:

* Bahn-Drehimpuls (wie die Erde um die Sonne) : $\hat{L}$
* Spin-Drehimpuls (wie die Erde um ihre Achse) : $\hat{S}$

Wenn man das <u>reale Wasserstoffatom</u> betrachtet (wir werden das später sehen), hat man in dem Hamilton-Operator der sogen. LS-Kopplung: $\hat{H}_{LS} = \alpha \hat{L}\cdot\hat{S} = \alpha(\hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_y\hat{S}_y + \hat{L}_z\hat{S}_z)$

nun: $[\hat{L}_z, \hat{H}_{LS}] = \alpha[\hat{L}_z, \hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_y\hat{S}_y + \hat{L}_z\hat{S}_z] =$ $\hat{L}$ und $\hat{S}$ kommutieren

$= \alpha[\hat{L}_z, \hat{L}_x]\hat{S}_x + \alpha[\hat{L}_z, \hat{L}_y]\hat{S}_y = \alpha i\hbar[\hat{L}_y\hat{S}_x - \hat{L}_x\hat{S}_y] \neq 0$

ebenfalls:

$[\hat{S}_z, \hat{H}_{LS}] = \alpha[\hat{S}_z, \hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_y\hat{S}_y + \hat{L}_z\hat{S}_z] =$

$= \alpha\hat{L}_x[\hat{S}_z, \hat{S}_x] + \alpha\hat{L}_y[\hat{S}_z, \hat{S}_y] = \alpha i\hbar[\hat{L}_x\hat{S}_y - \hat{L}_y\hat{S}_x] \neq 0$

• Aber wenn man $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$ nimmt, dann

$$[\hat{J}_z, \hat{H}_{LS}] = 0$$

* Also nun addieren wir $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$

und $[\hat{J}_z, \hat{H}_{LS}] = [\hat{J}^2, \hat{H}_{LS}] = 0$

obwohl $[\hat{J}_1, \hat{H}_{LS}] \neq 0$

$[\hat{J}_2, \hat{H}_{LS}] \neq 0$

* Da $[\hat{L}^2, \hat{L}_{x,y,z}] = 0$ und $[\hat{S}^2, \hat{S}_{x,y,z}] = 0$

dann wir haben immer noch $[\hat{L}^2, \hat{H}_{LS}] = [\hat{S}^2, \hat{H}_{LS}] = 0$

* Also ohne $\hat{H}_{LS}$ haben wir daß $\{\hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ bauten eine gute Basis von Observablen (die entsprechende Eigenfunktionen sind Eigenfunktionen von $\hat{H}$).

Aber mit $\hat{H}_{LS}$, $\{\hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\}$ bauen die richtige Basis.

---

* Aus diesen 2 Beispiele sehen wir ganz deutlich, daß es ist für viele Fälle notwendig, die Eigenzustände der zusammengesetzten Operatoren zu bestimmen. Wir werden in dieser Vorlesung lernen wie das geht.

• Wir werden erstmal ein Beispiel (2 Spins) und später die allgemeine Theorie.

* Sehen wir zuerst den Fall von 2 Spin-1/2 Teilchen (z.B. 2 Elektronen).

* Teilchen 1 $\longrightarrow$ $\hat{S}_1^2$, $\hat{S}_{1z}$ $\longrightarrow$ Eigenzustände $|m_1\rangle$
$m_1 = \pm 1/2$

$$\hat{S}_1^2 |m_1\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |m_1\rangle$$

$$\hat{S}_{1z} |m_1\rangle = \hbar\, m_1 \, |m_1\rangle$$

* Teilchen 2 $\longrightarrow$ $\hat{S}_2^2$, $\hat{S}_{2z}$ $\longrightarrow$ Eigenzustände $|m_2\rangle$, $m_2 = \pm 1/2$

$$\hat{S}_2^2 \, |m_2\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |m_2\rangle$$

$$\hat{S}_{2z} \, |m_2\rangle = \hbar m_2 \, |m_2\rangle$$

* Wir können die Zustände des gesamten 2-Teilchen System in der Form $|m_1, m_2\rangle$ schreiben.

$$\left.\begin{cases} \hat{S}_i^2 \, |m_1, m_2\rangle = 3\hbar^2/4 \; |m_1, m_2\rangle \\ \hat{S}_{iz} \, |m_1, m_2\rangle = \hbar m_i \; |m_1, m_2\rangle \end{cases}\right\} \quad i = 1, 2$$

* Wir suchen nun die gemeinsame Eigenzustände von $\{\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2, \hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ wobei $\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}$

und $\hat{S}^2 = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2)^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \hat{S}_2 \cdot \hat{S}_1$

$$= \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\left(\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z}\right)$$

* Es ist klar, daß

$$\hat{S}_z \, |m_1, m_2\rangle = (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}) \, |m_1, m_2\rangle = \hbar(m_1 + m_2) \, |m_1, m_2\rangle$$

- Was passiert mit $\hat{S}^2$?

$$\hat{S}^2 |m_1 m_2\rangle = \left(\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + 2\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} + 2\hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y}\right)|m_1 m_2\rangle$$

also:

$$\hat{S}^2 |-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \left[\frac{3\hbar^2}{4} + \frac{3\hbar^2}{4} + 2\left(\frac{-\hbar}{2}\right)\left(\frac{-\hbar}{2}\right)\right] |\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}\rangle$$

$$+\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

(Bemerkung: $\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} |\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}\rangle =$ $\quad \hat{S}_{1x}|\tfrac{-1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle$, $\hat{S}_{2x}|\tfrac{-1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$\hat{S}_{1y}|\tfrac{-1}{2}\rangle = -\frac{i\hbar}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle$, $\hat{S}_{2y}|\tfrac{-1}{2}\rangle = \frac{-i\hbar}{2}|\tfrac{1}{2}\rangle$

und $\hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y} |\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}\rangle =$

$$= -\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \quad)$$

---

also $\hat{S}^2 |-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = 2\hbar^2 |-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$

ähnlicherweise:

$$\hat{S}^2 |-1/2, +1/2\rangle = \hbar^2 \left[|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right]$$

$$\hat{S}^2 |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar^2 \left[|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right]$$

$$\hat{S}^2 |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = 2\hbar^2 |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

Sei $|-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$; $|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$|+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; $|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

· Dann haben wir die Matrix-Darstellung:

$$\hat{S}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man kann $\hat{S}^2$ diagonalisieren, und damit die Eigenzustände finden:

$$|S=1, M=-1\rangle \equiv |-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}^2 |1,-1\rangle = 2\hbar^2 |1,-1\rangle \\ \hat{S}_z |1,-1\rangle = -\hbar |1,-1\rangle \end{cases}$$

$$|S=1, M=+1\rangle \equiv |+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}^2 |1,1\rangle = 2\hbar^2 |1,1\rangle \\ \hat{S}_z |1,1\rangle = \hbar |1,1\rangle \end{cases}$$

$$|S=1, M=0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right] \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}^2 |1,0\rangle = 2\hbar^2 |1,0\rangle \\ \hat{S}_z |1,0\rangle = 0 \end{cases}$$

$$|S=0, M=0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right] \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}^2 |0,0\rangle = 0 \\ \hat{S}_z |0,0\rangle = 0 \end{cases}$$

* Also aus 2 spin-1/2 Teilchen bekommen wir:
  * Ein Zustand mit $S=0$, $M=0$ $\Longrightarrow$ Singulett
  * Drei Zustände mit $S=1$ $(M=\pm 1, 0)$ $\Longrightarrow$ Triplett.

• Wir werden nun die allgemeine Theorie der Zusammensetzung von Drehimpulsen studieren.

Sagen wir, daß wir 2 verschiedene Drehimpulse $\hat{J}_1$ und $\hat{J}_2$ haben (die kommutieren miteinander). Sei $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ die Eigenzustände von (gleichzeitig) $\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}\}$

ungekoppelte Basis

$$\begin{cases} \hat{J}_i^2 \, |j_1 j_2, m_1 m_2\rangle = j_i(j_i+1)\hbar^2 \, |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \\ \hat{J}_{iz} \, |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = m_i \hbar \, |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \end{cases} \quad i = 1,2$$

• Wir sind nun an den Operatoren $\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\}$ und die entsprechende Eigenzustände $|j_1 j_2, J, M\rangle$ wobei $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$.

gekoppelte Basis.

Wir wollen erstmal verstehen, welche Werte können J und M annehmen.

• Erstmal $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$

$$\hat{J}_z \, |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = (m_1 + m_2)\hbar \, |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$$

Also $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ sind auch Eigenzustände von $\hat{J}_z$ mit Eigenwert $M\hbar = (m_1+m_2)\hbar$.

Welche Werte kann M annehmen? ganz einfach:

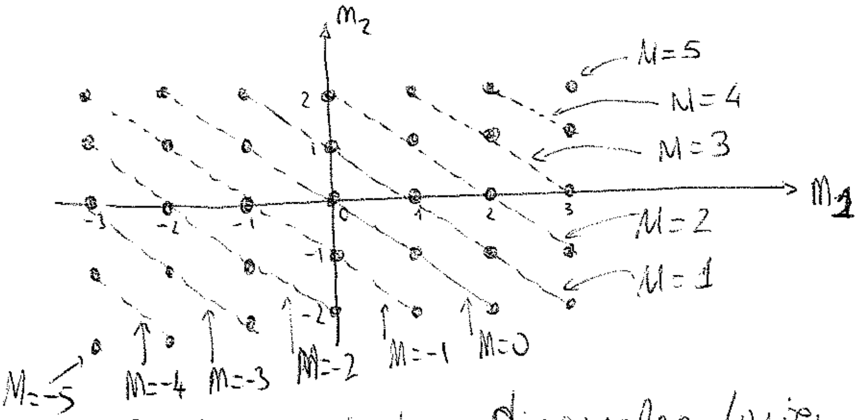
$$\boxed{M = j_1 + j_2 \; \cdots \; -(j_1+j_2)} \qquad \text{weil} \begin{cases} m_1 = -j_1 \cdots j_1 \\ m_2 = -j_2 \cdots j_2 \end{cases}$$

• Die 2. Frage, die wir beantworten wollen lautet:

<u>Wieviele Zustände haben dieselbe M?</u>

* Die Antwort zu dieser Frage ist der Entartungsgrad $g_{j_1 j_2}(M)$.

* Sehen wir ein Beispiel: $j_1 = 3$, $j_2 = 2$. Wir haben 35 $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ Zustände, die wir als Punkte auf einer $m_1 \times m_2$ Karte räpresentieren können.



Die Punkte auf den Diagonalen Linien teilen dieselbe M.
Der Entartungsgrad ist die Anzahl von Punkten auf diesen Diagonalen (z.B. $\to M=5 \to 1$, $M=4 \to 2$, $M=3 \to 3$ usw)

· Im Allgemeinen (sei $j_1 \geq j_2$)

· Für $M = j_1 + j_2 \longrightarrow g_{j_1 j_2}(M = j_1 + j_2) = 1$ $\longrightarrow$ nur $(+j_1, +j_2)$

· Für $M = j_1 + j_2 - 1 \longrightarrow g_{j_1 j_2}(M = j_1 + j_2 - 1) = 2$ $\longrightarrow$ $(j_1 - 1, j_2)$ und $(j_1, j_2 - 1)$

· Für $M = j_1 + j_2 - 2 \longrightarrow g_{j_1 j_2}(M = j_1 + j_2 - 2) = 3$

⋮

Die Entartung wächst bis $M = j_1 - j_2$

für $M = j_1 - j_2 \longrightarrow g_{j_1 j_2}(M = j_1 - j_2) = 2 j_2 + 1$

(in dem Beispiel daoben $j_1 - j_2 = 1$) $\longrightarrow$ Es ist klar aus der Abbildung, daß diese ist die maximale Entartung, die man haben kann.

* ~~Von~~ $M = j_1 - j_2$ bis $M = j_2 - j_1$ (im Beispiel von $M = 1$ bis $M = -1$) bleibt der Entartungsgrad konstant

Also $g_{j_1 j_2}(M) = 2j_2 + 1$ für alle $j_2 - j_1 \leq M \leq j_1 - j_2$

* Für größere M ~~[illegible]~~ nimmt $g_{j_1 j_2}(M)$ noch mal ab, bis $M = -j_1 - j_2$ wo $g_{j_1 j_2}(M) = 1$ noch mal. (siehe die Abbildung).

* Nun kennen wir wieviele Zustände haben dieselbe M, und welche mögliche M wir haben. ~~[illegible]~~ Nun werden wir diese Information benutzen, um die mögliche J Werte zu bestimmen.

Wir werden hier benutzen, daß für gegeben J, die mögliche Werte von $M = -J \ldots J$. Also für ein bestimmten $M \to J$ muß erfüllen $|M| \leq J$.

- Für $M = j_1 + j_2 \longrightarrow$ nur $J = j_1 + j_2$ kommt in Frage (deswegen Entartung $= 1$)
- Für $M = j_1 + j_2 - 1 \longrightarrow J = j_1 + j_2$ oder $j_1 + j_2 - 1$ (deswegen Entartung $= 2$)
- Für $M = j_1 + j_2 - 2 \longrightarrow J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2$ (Entartung 3)

Also die Entartung wächst weil mehr ~~mögliche~~ Werte von J sind möglich.

- Die maximale Entartung ist $\cancel{2} j_2 + 1$

$$J = j_1 + j_2, \ldots\ldots, j_1 - j_2$$

also diese sind die mögliche Werte, die J annehmen kann.

- Zusammengefaßt:

$$\boxed{\begin{array}{l} * \; J = j_1 + j_2, \ldots\ldots, |j_1 - j_2| \\ * \; M = -J \ldots J \end{array}}$$

- Zum Beispiel, für 2 Spin-1/2 Teilchen: $j_1 = s_1 = 1/2$, $j_2 = s_2 = 1/2$, also $J = j_1 + j_2 \ldots |j_1 - j_2| = 1, 0$.

$J = 1$, $M = \pm 1, 0 \longrightarrow$ TRIPLETT
$J = 0$, $M = 0 \longrightarrow$ SINGULETT

} wie wir schon gesehen haben

- Noch ein Beispiel: LS-Kopplung; $j_1 = l = 3$, $j_2 = s = 1/2$

Dann: $J = 3 + 1/2 \ldots |3 - 1/2|$

$= 7/2, \frac{5}{2}$.

$J = 7/2$, $M = \pm 7/2, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$ ← 8 Zustände

$J = 5/2$, $M = \pm 5/2, \pm 3/2, \pm 1/2$ ← 6 Zustände

* Nun kennen wir die mögliche Werte von J und M.

Wir wollen nun $|j_1 j_2 J M\rangle$ als linear Kombination von $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$, also wir wollen die gekoppelte Basis als Linearkombination der Elemente der ungekoppelten Basis

$$|j_1 j_2 J M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \underbrace{\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J M\rangle}_{} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

→ Clebsch-Gordan Koeffizienten

und umgekehrt

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{J} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | J M\rangle |j_1 j_2, J, M\rangle$$

* Der allgemeine Ausdruck der Clebsch-Gordan Koeffizienten ist relativ kompliziert. Ihr findet Tabellen dieser Koeffizienten in Bücher aber auch in Internet. z.B.

  * Wikipedia unter:
    http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_Clebsch-Gordan_coefficients

  * Es gibt auch Webseiten die diese Clebsch-Gordan-Koeffizienten rechnen; z.B.: http://www.gleet.org.uk/cleb/cgjava.html

* <u>Beispiel</u>: $j_1 = s_1 = 1/2 \longrightarrow m_1 = \pm 1/2$

$j_2 = s_2 = 1/2 \longrightarrow m_2 = \pm 1/2$

* $J = 0$, $M = 0 \rightarrow \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} | 0, 0 \rangle = 1/\sqrt{2}$

$\langle \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0\ 0 \rangle = -1/\sqrt{2}$

(<u>Bemerkung</u>: $m_1 + m_2 = M$ immer, also ich schreibe nur die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die diese Bedingung erfüllen)

also $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}, \frac{+1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle \right)$

also der Singulett, wie wir schon gesehen haben.