

Aufgabe 1: Komposition von 2 Spins (2 Punkte)

Der Hamiltonian für ein System von zwei Spins ist gegeben durch

$$\hat{H} = A + \frac{B}{\hbar^2} \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 + \frac{C}{\hbar} (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}),$$

wobei A , B und C Konstanten sind. Berechne die Eigenwerte und Eigenzustände des Hamiltonians unter der Annahme, dass gilt:

- Beide Teilchen haben Spin $1/2$.
- Ein Teilchen hat Spin $1/2$ und das andere Spin 1 .

Aufgabe 2: Zeitentwicklung von Spins (3.5 Punkte)

Betrachte zwei Teilchen. Teilchen 1 hat Spin 1 und Teilchen 2 hat Spin $1/2$. Zur Zeit $t = 0$, ist der Zustand des zwei-Teilchen-Systems

$$\Psi(0) = a|1, -1/2\rangle + b|0, 1/2\rangle,$$

wobei a und b Konstanten sind (reelle Zahlen). Wir benutzen die Notation $|m_1, m_2\rangle \equiv |s_1 = 1, m_1; s_2 = 1/2; m_2\rangle$. Wir nehmen an, dass die Dynamik des zwei-Teilchen-Systems bestimmt wird durch den den Hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{\alpha}{\hbar} \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2,$$

wobei α eine Konstante ist. Berechne nach einer gegebenen Zeit t den Zustand $|\Psi(t)\rangle$, und den Erwartungswert $\langle \hat{S}_{1z} \rangle$.

Aufgabe 3: Komposition von 3 Spins (4.5 Punkte)

Betrachte drei Teilchen mit Spin $1/2$. Sei $\hat{J} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$, und $\hat{S} = \hat{J} + \hat{S}_3$. Bestimme die gemeinsamen Eigenzustände von $\{\hat{S}^2, \hat{S}_z, \hat{J}^2, \hat{S}_3^2, \hat{S}_2^2, \hat{S}_1^2\}$, und die zugehörigen Eigenwerte. Schreibe die Eigenzustände als eine Linearkombination von Eigenzuständen der Basis $\{\hat{S}_1^2, \hat{S}_{1z}, \hat{S}_2^2, \hat{S}_{2z}, \hat{S}_3^2, \hat{S}_{3z}\}$. (Hint: Setze zunächst die ersten beiden Spins zusammen, und füge dann den dritten hinzu.)

Hinweis: In diesen Aufgaben brauchst du irgendwann die Clebsch-Gordan Koeffizienten zur Komposition von Drehimpulsen. Eine Tabelle mit Clebsch-Gordan Koeffizienten findest du im Internet, z.B. http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_Clebsch-Gordan_coefficients. Einen Rechner (java applet) für Clebsch-Gordan Koeffizienten findest du z.B. in <http://www.gleet.org.uk/cleb/cgjava.html>.