Aufgabe 1: Das gestörte Wasserstoffatom (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom ($Z = 1$), wobei wir nur die Coulombwechselwirkung zwischen Proton und Elektron betrachten. Nun nehmen wir an, das Proton sei keine Punktladung, sondern eine gleichmäßig geladene Kugel vom Radius $R \ll a_0$ (wobei a_0 der Bohrradius ist). Dann erhält man, anstatt eines Coulombpotentials $V(r) = -e^2/r$ für alle Werte von r, das Potential $V(r) = -e^2/r$ nur für $r > R$, und dagegen für $r < R$:

$$V(r) = -\frac{3e^2}{2R^3}\left[R^2 - \frac{r^2}{3}\right].$$

- Wie sieht der gestörte Hamiltonoperator für dieses Problem aus?
- Berechnen Sie die Energieverschiebung ΔE (in erster Ordnung) für den Grundzustand des Wasserstoffatoms.
- Zeigen Sie, daß für das Verhältnis zwischen ΔE und der ungestörten Grundzustandsenergie $\bar{E}$ gilt:
$$\Delta E/\bar{E} = -\frac{4}{5}\left(\frac{R}{a_0}\right)^2.$$

Hinweis: An einer Stelle vereinfacht die Tatsache $R \ll a_0$ ihre Rechnung enorm.

Aufgabe 2: Kastenpotential mit einer Deltafunktion als Störung (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Kastenpotential: $V(x) = 0$ für $|x| < a$, und $V(x) = \infty$ für $|x| > a$. Betrachten Sie eine Störung der Form $U(x) = \epsilon a \delta(x)$, wobei ϵ sehr klein ist. Berechnen Sie die Änderung der Energie des Grundzustandes des Kastenpotentials bis zur zweiten Ordnung in ϵ.

Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache aus, daß viele Matrixelemente Null sind. Sie werden $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ benötigen.

Aufgabe 3: Kastenpotential mit einer kleinen sinusförmigen Störung (4.0 Punkte)

Betrachten Sie wieder dasselbe Potential $V(x)$ wie in der letzten Aufgabe. Nehmen Sie nun folgende Störung: $U(x) = \epsilon \sin(\pi x/2a)$. Berechnen Sie die Korrekturen der Energie für die geraden Zustände bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung.

Hinweis: Benutzen Sie wieder die Tatsache, daß viele Matrixelemente aufgrund der Parität Null sind.