
Aufgabe 1: Modifiziertes Kronig-Penney-Potential (5 Punkte)

Gegeben sei das Potential $V(x) = g\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na) - g\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-(n-1/2)a)$ mit den Konstanten $g > 0$ und $a > 0$. Betrachten Sie positive Energien $E > 0$ und ermitteln Sie die Bedingungen für die erlaubten Bänder.
(Hinweis: Beachten Sie besonders die Periodizität des Potentials. Wenn man den Bereich $(n-1)a < x < na$ das Gebiet R_n nennt, dann hängen die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ im Gebiet R_n und $\psi_{n+1}(x)$ im Gebiet R_{n+1} folgendermaßen zusammen: $\psi_{n+1}(x) = \psi_n(x+a)e^{i\phi}$, wobei ϕ eine Phase ist.)

Aufgabe 2: Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit der Masse m, welches durch eine Gaußfunktion der Form

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}l_0}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l_0}\right)^2}$$

beschrieben wird. Nehmen Sie einen harmonischen Oszillator der Frequenz ω mit Mittelpunkt $x = 0$ an, so daß die Oszillatorlänge $l = \sqrt{\hbar/m\omega} > l_0$ beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen mit der Energie $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ zu finden?
(Hinweis: Sie benötigen das folgende Integral: $\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/2u} H_n(y) = (2\pi u)^{1/2}(1-2u)^{n/2}H_n(0)$, wobei $H_n(y)$ die Hermite-Polynome sind, $H_{2n'}(0) = (-1)^{n'}2^{n'}(2n'-1)!!$ und $H_{2n'+1}(0) = 0$, mit $(2n'-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n'-1)$.)

Aufgabe 3: Breite der Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators (2 Punkte)

Berechnen Sie die Varianz $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ für das n-te Niveau des 1D harmonischen Oszillators mit Mittelpunkt bei $x = 0$.
(Hinweis: Sie benötigen das folgende Integral: $\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} H_n(y)^2 y^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}(n+1/2)$).