Aufgabe 1: Periodisches Potential (2 Points)

Betrachten Sie folgendes Potential: $V(x) = g\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-(na+c)) + U(x)$, wobei $U(x) = 0$, außer für die Gebiete $na - b < x < na$, in denen $U(x) = V_0$ gilt. Betrachten Sie ein Teilchen der Energie $E < V_0$. Bestimmen Sie die Wellenfunktionen in den verschiedenen Gebieten des Potentials, und schreiben Sie (ohne sie zu lösen) die Gleichungen hin, die diese Wellenfunktionen erfüllen müssen.

Aufgabe 2: Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (3 Points)

Betrachten Sie den n-ten Zustand ($|n\rangle$) des harmonischen Oszillators

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

wobei $|0\rangle$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist. Wir verwenden eine Definition des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators (d.h. Aufsteige- und Absteige-Operators), die sich ein wenig von der aus der Vorlesung bekannten unterscheidet und die üblichere Variante ist:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}},$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}},$$

Beachten Sie, dass im Vergleich zur Vorlesung $\hat{a} = \hat{A}/\sqrt{\hbar}$, und $\hat{a}^\dagger = \hat{A}^\dagger/\sqrt{\hbar}$ gilt, und daher $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist dann von der Form $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$.

- Zeigen Sie, dass $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.
- Zeigen Sie, dass $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Um dies zu zeigen, brauchen Sie die Vertauschungsrelation von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$.
- Berechnen Sie $\langle n|\hat{x}|m\rangle$ und zeigen dabei, dass dieser Ausdruck null ist, außer für $n = m \pm 1$.

Aufgabe 3: Heisenbergbild (3 Points)

Betrachten Sie folgenden Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\omega_1^2\hat{x}^2 + \omega_2\hat{x} + \epsilon\right).$$

- Bestimmen Sie die Heisenberggleichungen für $\frac{d}{dt}\hat{x}$ und $\frac{d}{dt}\hat{p}$ unter Verwendung der Vertauschungsrelation des Ortsoperators $\hat{x}$ und des Impulsoperators $\hat{p}$.
- Lösen Sie die Heisenberggleichungen, um die Zeitabhängigkeit des Operators $\hat{x}(t)$ zu bestimmen.
- Schreiben Sie den Hamiltonoperator als Funktion des Erzeugungs- und des Vernichtungsoperators (benutzen Sie die Definition aus Aufgabe 2). Schreiben Sie (ohne sie zu lösen) die Heisenberggleichung für $\frac{d}{dt}\hat{a}$ hin.

Aufgabe 4: Heisenbergbild II (2 Points)

- Berechnen Sie den Kommutator $\left[\hat{p}, \frac{1}{x^2}\right]$ unter Verwendung der Definition des Kommutators.
- Betrachten Sie den Hamiltonoperator:

  $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + \frac{A}{x^2},$$

  wobei A eine Konstante ist. Bestimmen Sie (ohne sie zu lösen) die Heisenberggleichungen für $\frac{d}{dt}\hat{x}$, und $\frac{d}{dt}\hat{p}$.