Aufgabe 1: Dreidimensionaler Potential-Kasten (2 Punkte)

- Berechne die Grundzustandsenergie und die zugehörige normierte Eigenfunktion des dreidimensionalen Kastenpotentials charakterisiert durch $V(x, y, z) = 0$ für $-l_x \leq x \leq l_x$ und $-l_y \leq y \leq l_y$ und $-l_z \leq z \leq l_z$, und ∞ sonst.
- Nimm an, dass $l_x = l_y = l$, $l_z = \alpha l$. Bestimme den ersten angeregten Zustand und die zugehörige Eigenenergie.

Aufgabe 2: Zweidimensionale Schrödinger Gleichung (4 Punkte)

Betrachte die zweidimensionale zeitunabhängige Schrödinger Gleichung in der Ebene xy. Setze ein Potential $V(x, y) = V(r)$ voraus, wobei $r^2 = x^2 + y^2$.

- Drücke die zweidimensionale Schrödinger Gleichung in Polarkoordinaten ($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$) aus.
- Benutze die Methode der Separation der Variablen um zu zeigen dass die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators geschrieben werden können als $\Psi(\vec{r}) = R(r)e^{im\phi}$.
- Bestimme die resultierende Gleichung für die Radialfunktion $R(r)$. Welche Form hat die Zentrifugalbarriere in der zweidimensionalen Radialgleichung?

Aufgabe 3: Kugelflächenfunktionen (4 Punkte)

Ein Teilchen in einem dreidimensionalen Zentralfeld $V(r)$ wird beschrieben durch die Wellenfunktion

$$\Psi(x, y, z) = C(xy + yz + zx)e^{-\alpha r^2},$$

wobei C und α Konstanten sind.

- Drücke die Wellenfunktion als Funktion der Kugelflächenfunktionen aus.
- Finde heraus, welche Werte der Quantenzahlen l und m bei einer Messung von $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ angenommen werden können und mit welcher Wahrscheinlichkeit.
- Angenommen wir haben 50% Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Zustand $l = 2$, $m = 2$ zu finden, und 50% Wahrscheinlichkeit in $l = 1$, $m = -1$. Drücke die Wellenfunktion, die dieses Teilchen repräsentiert in kartesischen Koordinaten aus.