Aufgabe 1: Dreidimensionale Potentialgrube (3,0 Punkte)

Betrachten Sie ein Potential mit $V(r) = -V_0$ für $r < a$ und $V(r) = 0$ sonst. Zeigen Sie, daß die Bedingung für die erlaubten Energien $E < 0$ für $l = 1$ folgende Form hat:

$$\frac{2 - (\kappa a)^2 - 2\kappa a \cot \kappa a}{1 - \kappa a \cot \kappa a} = 2 + \frac{(\alpha a)^2}{1 + \alpha a},$$

wobei $\kappa = \sqrt{\frac{2m(E+V0)}{\hbar^2}}$, und $\alpha = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$.

Aufgabe 2: Dreidimensionale Potentialgrube II (3,5 Punkte)

Betrachten Sie das Potential aus Aufgabe 1, jetzt jedoch mit $E > 0$.

- Zeigen Sie, daß die radiale Wellenfunktion für $r \gg a$ und für alle l die folgende Form hat:
$$R_l(r) \simeq \frac{B}{kr} \left[\sin(kr - l\pi/2) - C \cos(kr - l\pi/2)\right]$$
wobei B und C Konstanten sind, und $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.
- Zeigen Sie, daß für $l = 0$
$$C = \frac{q \cot qa - k \cot ka}{k + q \cot qa \cot ka},$$
wobei $q = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$.

Aufgabe 3: Wasserstoffartiges Atom (2,0 Punkte)

Betrachten Sie ein wasserstoffartiges Atom mit der Ladung Ze im Kern. Berechnen Sie für den 2S-Zustand die Werte von $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$. Welchen Wert hat $\langle z \rangle$? (Tip: $\int_0^\infty d\rho \rho^s e^{-\rho} = s!$).

Aufgabe 4: Positronium (1,5 Punkte)

- Positronium besteht aus einem Positron (d.h. einem Anti-Elektron, mit der Masse eines Elektrons aber der entgegengesetzten Ladung) und einem Elektron. Berechnen Sie die Eigenenergien des Positroniums und vergleichen Sie sie mit denen des Wasserstoffs.