Aufgabe 1: Freies Elektron im Magnetfeld (4.5 Punkte)

Betrachten Sie ein freies Elektron (also ein nicht an ein Atom gebundenes) in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Das freie Elektron befinde sich in der xy-Ebene. Vernachlässigen Sie die z-Richtung (d.h. betrachten Sie eine zweidimensionale Bewegung des Elektrons).

- Benutzden Sie den Hamiltonoperator aus der Vorlesung, aber jetzt vernachlässigen Sie nicht den von B^2 abhängigen Term ("dritter Term" in der Vorlesung). Wechseln Sie von (x, y)-Koordinaten zu Polarkoordinaten (r, ϕ) und schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für die Eigenfunktion $\psi(r, \phi)$ mit Eigenenergie E.

- Nutzen Sie die Methode der Separation der Variablen $\psi(r, \phi) = R(r)e^{im\phi}$ (wie bereits für ein ähnliches 2D Problem in Blatt 7). Nachdem Sie zu geeigneten Koordinaten $r \to \eta$ übergegangen sind, zeigen Sie, daß die Gleichung für die radiale Wellenfunktion $R(\eta)$ in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}R + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}R - \frac{m^2}{\eta^2}R - \eta^2 R + \lambda R,$$

wobei

$$\lambda = \frac{4\mu cE}{eB\hbar} - 2m$$

.

- Benutzen Sie den Ausdruck $R(\eta) = \eta^{|m|}e^{-\eta^2/2}G(\eta)$, und zeigen Sie, daß $G(\eta) = L_{n_r}^{|m|}(\eta^2)$, wobei $n_r = 0, 1, 2, \ldots$. Finden Sie n_r als Funktion von λ und m, und bestimmen Sie daraus die Eigenenergien

$$E = \frac{eB\hbar}{2\mu c}(2n_r + 1 + |m| + m)$$

Aufgabe 2: Spin-1/2 Teilchen (2.0 Punkte)

Betrachte ein Spin-1/2 System (z.B. ein Elektron wie in der Vorlesung).

- Berechnen Sie die Eigenzustände and Eigenwerte von $\hat{S}_x + \hat{S}_y$.

- Nehmen Sie an, Sie messen $\hat{S}_x + \hat{S}_y$ und erhalten den Eigenzustand mit dem höchsten Eigenwert. Danach messen Sie $\hat{S}_z$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit als Meßwert $\hbar/2$ zu erhalten ?

Aufgabe 3: Spindynamik im Heisenbergbild (3.5 Punkte)

Ein Spin-1/2 Teilchen (z.B. ein Elektron) befinde sich in einem Magnetfeld $\vec{B}$. Nehmen Sie an, daß sich das Elektron nicht bewegen kann. Dann hat der Hamiltonoperator die in der Vorlesung angegebene Form:

$$\hat{H} = \frac{eg}{2mc} \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B},$$

wobei $\hat{\vec{S}} = \{\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\}$ und $g \simeq 2$.

- Leiten Sie die Heisenberggleichung für den Operator $\hat{\vec{S}}(t)$ her.
- Nehmen Sie $\vec{B} = (0, 0, B)$ an und berechnen Sie $\hat{S}_x(t)$ and $\hat{S}_y(t)$ als Funktion von $\hat{S}_x(0)$ und $\hat{S}_y(0)$.