• Gewöhnliche Differenzialgleichungen

* Eine gewöhnliche Differenzialgleichung (G-DGl) ist der Form

$$F\left[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right] = 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{das wäre eine G-DGl} \\ n\text{-ter Ordnung}\end{array}\right)$$

wobei x eine Variable ist, und $y(x)$ eine Funktion einer Variable, die wir aus der Gleichung bestimmen müssen. $F[\dots]$ ist eine gewisse Funktion.

z.B. $y'' + x\,y(x) - x^2 = 0$ ist ein Beispiel einer G-DGl 2-ter Ordnung.

• Partielle-DGl sind Differenzialgleichungen für Funktionen mehrerer Variablen $y(x_1, x_2, \dots, x_m)$, und die hängen von partiellen Ableitungen ab. Hier werden wir nur G-DGl betrachten.

Gewöhnliche DGl (und im allgemeinen alle DGl) sind nicht einfach zu lösen (im allgemeinen). Hier werden wir nur einige Methoden und Tricks diskutieren (es gibt natürlich viele andere aber die werden wir hier nicht betrachten), die uns erlauben manche Gleichungen analytisch zu lösen. Es gibt aber viele Gleichungen die eigentlich nicht analytisch lösbar sind. Für diese Gleichungen braucht man numerische Verfahren. Hier werden wir diese numerische Verfahren nicht diskutieren, aber ihr müsst wissen, daß diese Methode existieren und sie spielen eine wichtige Rolle in der Physik.

* Eine G-DGl ist linear, wenn die Funktion F linear in den Ableitungen $y^{(n)}(x)$ ist, also die sind der Form:

$$L_n y \equiv y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + f_1(x)\, y'(x) + f_0(x)\, y(x) = f(x)$$

z.B. die Gleichung

$$y''(x) + x\,y(x) = x^2 \quad \text{ist \underline{linear}}$$

aber $y''(x) + y(x)^2 = x$ ist nichtlinear (hängt von $y(x)^2$)

(Bemerkung: nichtlineare DGl spielen eine sehr bedeutende Rolle in der Physik (die sogen. nichtlineare Physik), und die sind ziemlich komplizierter zu lösen als die lineare DGl. Hier werden wir fast nur lineare Gleichungen betrachten)

* Wenn die extra $f(x)$ Funktion ist Null, also

$$L_n y \equiv y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + f_1(x)\, y'(x) + f_0(x)\, y(x) = 0$$

haben wir eine homogene Gleichung

Wenn $f(x) \neq 0$ haben wir eine inhomogene Gleichung

---

* LINEARE G-DGl

* Eine homogene G-DGl n-ter Ordnung hat n linear unabhängige Lösungen:

$$L_n y(x) = 0 \longrightarrow y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

Bemerkung: n Funktionen $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ sind linear unabhängig, wenn gegeben eine Gleichung

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \longrightarrow \text{Das hat nur als Lösung } \alpha_k = 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, N$$

* Die Lösungen einer linearen homogenen G-DGl

$$L_n y(x) = 0$$

erfüllen das Superpositionsprinzip, also wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen sind:

$$L_n y_1(x) = 0$$
$$L_n y_2(x) = 0$$

dann alle lineare Kombinationen $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ sind auch Lösungen. Das ist einfach zu sehen, weil für lineare GDGl:

$$L_n [\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] = \alpha L_n y_1(x) + \beta L_n y_2(x) = 0$$

* Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen GDGl ist also der Form:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Die Konstanten $c_1, \dots, c_n$ müssen durch die Randbedingungen bestimmt werden. Also für die Lösung einer n-ten-Ordnung G-DGl brauchen wir n Bedingungen.

z.B. für eine typische Bewegungsgleichung der Form:

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0$$

wir brauchen 2 Bedingungen für die endgültige Festlegung der Lösung (typischerweise, aber nicht immer, die Stellung $x(t_0)$ und die Geschwindigkeit $\dot{x}(t_0)$, für eine gewisse Anfangszeit t_0)

* Die allgemeine Lösung ~~einer~~ einer inhomogenen linearen G-DGl der Form:

$$L_n y(x) = f(x)$$

ist $y(x) = y_S(x) + \underbrace{c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)}_{\text{Lösung der G-DGl mit } f(x)=0 \; (y_H(x))}$

$y_S(x)$: irgendeine spezielle Lösung solch daß $L_n y_S(x) = f(x)$

Damit $L_n y(x) = \underbrace{L_n y_S(x)}_{f(x)} + \underbrace{L_n y_H(x)}_{0} = f(x)$

wir wir wollten. Wie immer die Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$ müssen durch die Randbedingungen bestimmt werden.

---

* LINEARE GDGl erster ORDNUNG

* Sei nun eine lineare G-DGl 1. Ordnung der Form:

$$y'(x) + P(x) y(x) = Q(x)$$

* Wie schon erwähnt, die allgemeine Lösung ist der Form

$$y(x) = y_H(x) + y_S(x) \longrightarrow \text{spezielle Lösung}$$

$y_H(x)$: Lösung von $y'(x) + P(x) y(x) = 0$

* Wir suchen erstmal nach $y_H(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = 0 \longrightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

Wir integrieren beide Seiten: $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = -\int_{x_0}^{x} P(x')\,dx'$

wobei $y_0 = y(x_0) \longrightarrow$ Randbedingung

Also $\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = -\int_{x_0}^{x} P(x')\,dx'$

und damit

$$\boxed{y_H = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'}}$$

Wir haben nun die homogene Lösung. Wir suchen nun nach einer speziellen Lösung $y_S(x)$. Es gibt verschiedene Methoden aber vielleicht am einfachsten (mindestens für vielen Fällen) ist die sogenannte <u>Variation der Konstanten</u>. Gucken wir nun wie das geht:

$$y_S(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} \cdot z(x)$$

Wir nehmen also die homogene Lösung, aber nun anstatt eine Konstante y_0 haben wir eine Funktion $z(x)$ die wir bestimmen müssen

Nun
$$y_S'(x) = -P(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} z(x)$$
$$+ e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} z'(x)$$
$$= -P(x)\, y_S(x) + e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} z'(x)$$

Wir wollen, daß
$$y_S'(x) = -P(x)\, y_S(x) + Q(x)$$

also
$$Q(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} z'(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = e^{\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} Q(x)$$

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} dx'\, e^{\int_{x_0}^{x'} P(x'')dx''} Q(x')$$

$$z(x_0) = z_0$$

Also: $y_S(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} \left[z_0 + \int_{x_0}^{x} dx' \, e^{\int_{x_0}^{x'} P(x'')dx''} Q(x') \right]$

Damit $y_S(x_0) = z_0$

Da $y(x_0) = y_H(x_0) + y_S(x_0) = y_0 + z_0 = y_0 \longrightarrow z_0 = 0$

also $y_S(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} \int_{x_0}^{x} dx' \, e^{\int_{x_0}^{x'} P(x'')dx''} Q(x')$

. Nun können wir letztendlich die allgemeine Lösung der Gleichung schreiben:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x')dx'} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} dx' \, e^{\int_{x_0}^{x'} P(x'')dx''} Q(x'') \right\}}$$

* Natürlich das ist eine formale Lösung. Wir müssen nun die Integralen machen, und das ist leider nicht immer einfach (oder sogar machbar!).

. BEISPIEL:

. Sei die Gleichung: $\dot{y}(t) + \alpha y(t) = \beta$, wobei α und β Konstanten sind.

• Lösung der homogenen Gleichung: $\dot{y}_H(t) = -\alpha y_H(t)$

Also $y_H(t) = y_0 e^{-\alpha t}$ wobei $y_0 = y(t=0)$

. Spezielle Lösung: $y_S(t) = e^{-\alpha t} z(t)$

$\dot{y}_S + \alpha y_S = -\alpha y_S + e^{-\alpha t}\dot{z} + \alpha y_S = e^{-\alpha t}\dot{z} = \beta$

Dann $\dot{z} = \beta e^{+\alpha t} \longrightarrow z(t) = \beta \int_0^t e^{+\alpha t'} dt = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$

Dann $y(t) = y_H(t) + y_S(t) = e^{-\alpha t}\left[y_0 + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \right]$

LINEARE G-DGl HÖHERER ORDNUNGEN

* Sei eine lineare G-DGl n-ter Ordnung der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x)$$

* Wir können diese Gleichung in einem System von n G-DGl 1. Ordnung umwandeln:

Sei
$$\begin{aligned} u_1(x) &\equiv y'(x) \\ u_2(x) &\equiv y''(x) \\ &\vdots \\ u_{n-1}(x) &\equiv y^{(n-1)}(x) \end{aligned} \implies \left\{ \begin{aligned} y'(x) &= u_1(x) \\ u_1'(x) &= u_2(x) \\ u_2'(x) &= u_3(x) \\ &\vdots \\ u_{n-2}'(x) &= u_{n-1}(x) \\ u_{n-1}'(x) &= f[x, y, u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)] \end{aligned} \right.$$

Gleichungs-system von gleichungen 1. Ordnung

wobei $f[x, y, u_1, \dots, u_{n-1}] = f(x) - a_0(x)\, y(x) - a_1(x)\, u_1(x) - \dots - a_{n-1}(x)\, u_{n-1}(x)$

* sei der Vektor:

$$\vec{Y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ u_1(x) \\ \vdots \\ u_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

der Vektor:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Dann können wir das Gleichungssystem in der Form

$$\boxed{\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A \cdot \vec{Y} + \vec{F}}$$

* Das ist eine Matrix-Verallgemeinerung der 1. Ordnung-Gleichung von S. 166.

· **BEISPIEL**: Sei $\ddot{x} + a(t)\dot{x}(t) + b(t)\,x(t) = f(t)$

Sei $\dot{x} = v(t) \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = f(t) - a(t)\,v(t) - b(t)\,x(t) \end{array}\right\}$

Also:
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{Y}(t) = A \cdot \vec{Y}(t) + \vec{F}(t)$$

* Die Lösung dieser Matrix-gleichungen folgt eine ähnliche Idee wie für die Gleichungen 1. Ordnung in S. 166.

Wir suchen erstmal nach der Lösung der homogenen Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\vec{Y}_H(x) = A\,\vec{Y}_H(x)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist der Form:

$$\vec{Y}_H(x) = U(x, x_0)\cdot\vec{Y}_0 \quad \text{mit} \quad \frac{dU}{dx} = A\cdot U \text{ und } U(x_0, x_0) = \mathbb{1}$$

wobei $U(x, x_0)$ ist die sogen. <u>Entwicklungsmatrix</u>

(<u>Bemerkung</u>: Die Entwicklungsmatrix ~~ist die Form~~ bringt uns von $\vec{Y}_0 = \vec{Y}(x_0)$ zu $\vec{Y}_H(x)$)

* Für eine ~~GDGl~~ DGl 1. Ordnung $U(x, x_0) = e^{-\int_{x_0}^{x} dx'\, P(x')}$ für die Gleichung auf S. 166. Für die Matrix Gleichung $U(x, x_0)$ ist in allgemeinen nicht einfach $e^{+\int_{x_0}^{x} dx'\, A(x')}$

Das ist nur der Fall wenn die ~~Mat~~ Matrix A konstant (also x-unabhängig ist), weil wenn A nicht konstant ist $[A(x), A(x')] \neq 0$ in allgemeinen für $x \neq x'$.

* Wenn die Matrix A ist konstant

$$U(x,x_0) = \exp\left[+\int_{x_0}^{x} dx'\, A(x')\right] = \exp\left[+A\cdot(x-x_0)\right]$$

* Nun ein Paar Worten über die exponentielle Funktion eines Matrix. Das sieht ein bisschen komisch aus, aber die Idee ist ganz einfach mit Hilfe der Taylor-Entwicklung. Aus der Taylor-Reihe der exponentiellen Funktion (S. 154):

$$e^{A(x-x_0)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-x_0)^n A^n$$

Sei nun die Hauptachsentransformation von A (S. 135)

$$RAR^T = D \longrightarrow A = R^T D R$$

wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sind die Eigenwerte

und $R^T = \left((\vec{v}_1), \ldots, (\vec{v}_n)\right)$ die entsprechenden Eigenvektoren.

Dann:

$$e^{A(x-x_0)} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(x-x_0)^m \underbrace{(R^T D R)(R^T D R)\cdots(R^T D R)}_{m \text{ Mal}} \overset{RR^T = \mathbb{1}\ (S.\,134)}{=}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(x-x_0)^m R^T D^m R = R^T \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(x-x_0)^m \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix}\right] R$$

$$= R^T \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(x-x_0)^m \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(x-x_0)^m \lambda_n^m \end{bmatrix} R = R^T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 (x-x_0)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n (x-x_0)} \end{bmatrix} R$$

also zusammengefasst:

$$e^{A(x-x_0)} = R^T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(x-x_0)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n(x-x_0)} \end{pmatrix} R$$

---

* BEISPIEL: Wir nehmen das Beispiel von S (170) mit $b=-1$ und $a=0 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Eigenwerte und Eigenvektoren $\Big\}$ $\lambda_1 = 1 \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1 \longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Dann

$$e^{A(\cancel{t}-\cancel{t}_0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(\cancel{t}-\cancel{t}_0)} & 0 \\ 0 & e^{-(\cancel{t}-\cancel{t}_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\cancel{t}-\cancel{t}_0) & \sinh(\cancel{t}-\cancel{t}_0) \\ \sinh(\cancel{t}-\cancel{t}_0) & \cosh(\cancel{t}-\cancel{t}_0) \end{pmatrix}$$

(Bemerkung: die hyperbolische Funktionen:

Cosinus hyperbolicus $\longrightarrow \cosh\alpha = \dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$

Sinus hyperbolicus $\longrightarrow \sinh\alpha = \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$

Man schreibt auch $\operatorname{ch}\alpha$ und $\operatorname{sh}\alpha$)

* Sei $\overline{Y}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ mit $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$

Dann $\overline{Y}_H(\cancel{t_0}) = \begin{pmatrix} \cosh(t-t_0) & \sinh(t-t_0) \\ \sinh(t-t_0) & \cosh(t-t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x_H(t) &= \cosh(t-t_0)\,x_0 + \sinh(t-t_0)\,v_0 \\ v_H(t) &= \sinh(t-t_0)\,x_0 + \cosh(t-t_0)\,v_0 \end{aligned}}$$

* Nun müssen wir eine spezielle Lösung finden. Wir benutzen noch mal die Variation der Konstanten:

$$\vec{y}_s(x) = U(x,x_0)\cdot\vec{z}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\vec{y}_s = \frac{dU}{dx}\cdot\vec{z} + U\cdot\frac{d\vec{z}}{dx} = A\cdot U\cdot\vec{z} + U\frac{d\vec{z}}{dx} = A\vec{y}_s + U\frac{d\vec{z}}{dx}$$

Andererseits $\longrightarrow \dfrac{d}{dx}\vec{y}_s = A\vec{y}_s + \vec{F}$

Also $\quad U\dfrac{d\vec{z}}{dx} = \vec{F} \Longrightarrow \dfrac{d\vec{z}}{dx} = U^{-1}\cdot\vec{F}$

und damit $\quad \vec{z}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx'\, U^{-1}(x',x_0)\cdot\vec{F}(x')$

* Nun haben wir die endgültige Lösung

$$\underline{\vec{y}(x) = U(x,x_0)\left[\vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} dx'\, U^{-1}(x',x_0)\,\vec{F}(x')\right]}$$

---

* <u>BEISPIEL</u>: Wir nehmen unseres Beispiel von vorher, mit $a=0, b=-1, f=1$

$$U = \begin{bmatrix} ch(t-t_0) & sh(t-t_0) \\ sh(t-t_0) & ch(t-t_0) \end{bmatrix} \; ; \; U^{-1} = \begin{bmatrix} ch(t-t_0) & -sh(t-t_0) \\ -sh(t-t_0) & ch(t-t_0) \end{bmatrix}$$ (überprüft es!)

(<u>Bemerkung</u>: $ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1$)

Dann: $\displaystyle\int_{t_0}^{t} dt'\, U^{-1}(t',t_0)\cdot\vec{F}(t') = \int_{t_0}^{t} dt' \begin{bmatrix} ch(t'-t_0) & -sh(t'-t_0) \\ -sh(t'-t_0) & ch(t'-t_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \begin{bmatrix} -sh(t'-t_0) \\ ch(t'-t_0) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} [-ch(t'-t_0)]_{t_0}^{t} \\ [sh(t'-t_0)]_{t_0}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ch(t-t_0) \\ sh(t-t_0) \end{pmatrix}$$

(<u>Bemerkung</u>: aus der Definition von $ch\alpha$ und $sh\alpha$, sollte klar sein, daß $\frac{d}{d\alpha}ch\alpha = sh\alpha$ und $\frac{d}{d\alpha}sh\alpha = ch\alpha$)

* Also $\quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} ch(t-t_0) & sh(t-t_0) \\ sh(t-t_0) & ch(t-t_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 + (1 - ch(t-t_0)) \\ v_0 + sh(t-t_0) \end{bmatrix}$

also $\quad \boxed{x(t) = ch(t-t_0)x_0 + sh(t-t_0)v_0 + ch(t-t_0) - 1}$

- ANDEREN NÜTZLICHEN METHODEN UND TRICKS

* Eine vollständige Diskussion über GDGl würde uns Monate kosten. Ich wollte euch nun ganz kurz einige Tricks im Rahmen von Beispielen vorstellen. Ich werde die nur erwähnen, da für eine tiefe Diskussion gibt es leider keine Zeit.

* Anwendung von Potenzreihen

Mehrmals können wir eine G-DGl mit Hilfe einer Potenzreihe lösen. z.B:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Wir machen den Ansatz:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} \quad \text{sei } \tilde{n} = n+k$$

k ist nicht unbedingt eine Ganzzahl

Dann $y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{n} x^{\tilde{n}-1}$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{n}(\tilde{n}-1) x^{\tilde{n}-2}$$

Also $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{n}(\tilde{n}-1) x^{\tilde{n}} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n \tilde{n} x^{\tilde{n}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\tilde{n}} = 0$

$\Rightarrow$ Wir gruppieren alle Glieder mit dieselben Potenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\tilde{n}(\tilde{n}-1) - 2\tilde{n} + 2] = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\tilde{n}^2 - 3\tilde{n} + 2]$$

Das hat eine einfache Lösung. Wir suchen nach der Lösungen von $\tilde{n}^2 - 3\tilde{n} + 2 = 0 \Rightarrow \tilde{n} = 1$ und $\tilde{n} = 2$

In dem Fall können wir $k=0$ annehmen, also $n = 1, 2$.

Wir nehmen nun $a_n = 0$ außer für $n=1$ und $n=2$.

Also $\boxed{y(x) = a_1 x + a_2 x^2} \longrightarrow$ Die Koeffizienten werden nun aus der Randbedingungen bestimmt.

(Bemerkung: in diesem Beispiel war alles ganz einfach, im allgemeinen ist die Methode (sogen. Frobenius-Methode) komplizierter)

* Variablenwechsel

· Mehrmals können wir eine GDGl einer komplizierten Form in eine viel einfache Form mit Hilfe einer geschickten Variablenwechsel umwandeln.

z.B. die vorherige Gleichung: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Diese Gleichung ist relativ schwierig, weil die Koeffizienten der linearen Gleichung x-abhängig sind. Das läßt sich einfach ändern:

$$\text{Sei } x = e^t \rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t \rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$\text{Dann } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{d}{dt}y\right] = e^{-t}\left\{-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right\}$$

$$= -e^{-2t}\frac{dy}{dt} + e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\text{Also } x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

Wir bekommen nun also eine G-DGl mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + 2u = 0$$

* Wir werden später diese Gleichung noch mal treffen, und zwar in unserer Diskussion der Schwingungen.

* Reduktion der Ordnung

· Mehrmals können wir die Ordnung einer Gleichung reduzieren. Es gibt mehreren Tricks; z.B:

* Sei z.B. $y'' + 5y' + 6y = 0$ → wir können das in der Form: $\left(\frac{d}{dx} + 2\right)\left(\frac{d}{dx} + 3\right)y = 0$ schreiben.

$$\text{Sei } \left(\frac{d}{dx} + 3\right)y = u \longrightarrow \left(\frac{d}{dx} + 2\right)u = 0$$

Wir lösen erstmal $\left(\frac{d}{dx} + 2\right)u = 0$ und dann mit der Lösung von u, lösen wir $\left(\frac{d}{dx} + 3\right)y = u(x)$

* Sei z.B $y'' + 5y' = x^2$ → Das ist nun eine Gleichung nur mit y'' und y', aber nicht y. Dann nehmen wir $u \equiv y'$. Damit $u' + 5u = x^2$ (1. Ordnung). Wir lösen nach u, und dann lösen wir die Gleichung $y' = u(x)$.

* Trennung der Variablen

· Manchmals haben wir Gleichungen der Form: $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$ wobei f und g sind Funktionen. Hier können wir die sogen. Trennung der Variablen anwenden:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \longrightarrow \underbrace{\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)}}_{H(y)} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}_{F(x)}$$

Wir müssen nun die Funktion H umkehren $\Rightarrow y = H^{-1}(F(x))$

Die Umkehrung ist typischerweise schwierig (und nur numerisch gemacht)

(Beispiel von Umkehrung: $H(y) = \ln y \rightarrow H^{-1}[F(x)] = e^{F(x)}$)

- SCHWINGUNGEN

- Wir werden nun ein besonderes Beispiel einer linearen G-DGl, nämlich die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators.
S. 156
- Aus unserer Diskussion der harmonischen Näherung ↓ wissen wir schon, daß die Theorie des harmonischen Oszillators sehr wichtig ist.
- Wir betrachten ~~erstmals~~ zuerst die Bewegungsgleichung einer Feder

$$m\ddot{x} = -kx \longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Sei $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Wir haben hier ein Beispiel einer homogenen linearen G-DGl 2-ter Ordnung. Im Prinzip können wir diese G-DGl 1-ter Ordnung Gleichung in ein System von G-DGl 1-ter Ordnung umwandeln (S. 169). Hier ist es aber besser ein geeigneten Ansatz zu machen, und zwar ein

Exponential-Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t} \longrightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \longrightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Dann:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Longrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Longrightarrow \lambda = \pm i\omega_0$$

Wir haben also 2 Lösungen (das hätten wir erwarten können, da die Gleichung ist 2-ter Ordnung):

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

Die allgemeine Lösung ist also der Form:

$$x(t) = C_1\, e^{i\omega_0 t} + C_2\, e^{-i\omega_0 t}$$

wobei die Konstanten C_1 und C_2 durch die Randbedingungen bestimmt werden.

. Aus der Euler-Formel (S. 155):

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i \sin\omega_0 t$$

und damit

$$x(t) = C_1 [\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t] + C_2 [\cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t]$$

$$= \underbrace{[C_1 + C_2]}_{A} \cos\omega_0 t + \underbrace{[i(C_1 - C_2)]}_{B} \sin\omega_0 t$$

Also, alternativ können wir schreiben:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

und damit $\dot{x}(t) = \omega_0 [-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t]$

Damit $x(0) = A = x_0$ ← Anfangsstellung

$\dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0$ ← Anfangsgeschwindigkeit

Also $$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

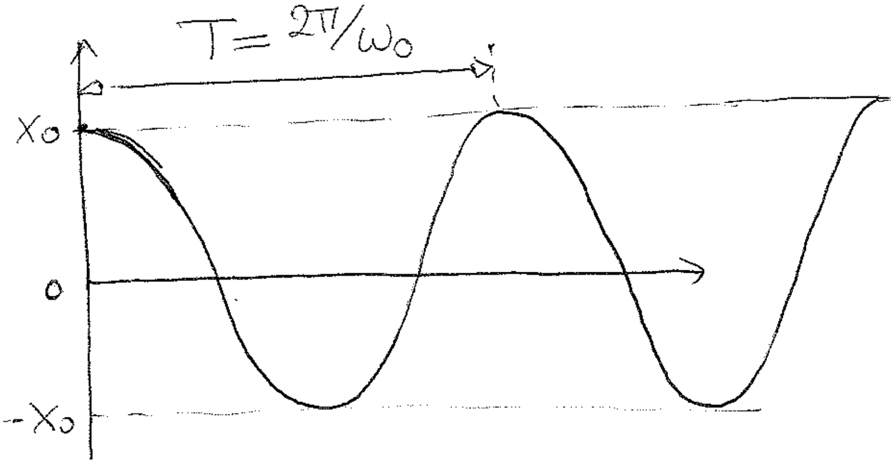
$$= \left(x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2\right)^{1/2} \left[\frac{x_0}{\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}}\cos\omega_0 t + \frac{v_0/\omega_0}{\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}}\sin\omega_0 t\right]$$

Sei $$\left.\begin{aligned}\sin\delta &= x_0 \Big/ \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2} \\ \cos\delta &= \frac{v_0/\omega_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}}\end{aligned}\right\} \quad \delta = \arctan\left(\frac{x_0\omega_0}{v_0}\right)$$

und $C = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}$. Dann

$$\boxed{x(t) = C \sin(\omega_0 t + \delta)} \longleftarrow \text{Das beschreibt eine Schwingung}$$

• Für $v_0 = 0 \longrightarrow \left.\begin{array}{l}\delta = \pi/2 \\ C = x_0\end{array}\right\} x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$



$\omega_0 \equiv$ Frequenz der Schwingung

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \equiv$ Periode

• Also, wie erwartet, eine Feder schwingt.

• Aber aus unserer alltäglichen Erfahrung wissen wir, daß wenn ich von der Feder ziehe und loslasse, die Feder schwingt, aber nicht ewig. Die Schwingungen sind kleiner und kleiner, und letztendlich die Masse an der Feder stoppt. Diese Intuition bringt uns direkt an der Idee des <u>gedämpften harmonischen Oszillators</u>.

• Wir führen also eine gewisse <u>Reibung</u> die die Bewegung der Masse an der Feder dämpfen wird:

$$m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{Federkraft}} \; \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\text{Reibungskraft (S. 25)}}$$

Wir haben also eine Bewegungsgleichung der Form:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{wobei } 2\gamma \equiv \frac{\alpha}{m}, \; \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

Wir führen noch mal ein Exponential-Satz ein:

$$x(t) = e^{\lambda t} \longrightarrow \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \longrightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

und damit

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Longrightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\gamma \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}$$

Also $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

- Hier haben wir verschiedene Varianten: ← wir werden das nicht betrachten
  - $\gamma = \omega_0 \Longrightarrow$ ~~Kritische Dämpfung~~
  - $\gamma < \omega_0 \Longrightarrow$ Unterkritische Dämpfung
  - $\gamma > \omega_0 \Longrightarrow$ Überkritische Dämpfung.
- Gucken wir erstmal die unterkritische Dämpfung ($\gamma < \omega_0$)

Dann $\omega_0^2 > \gamma^2 \longrightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Sei $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \Longrightarrow \lambda = -\gamma \pm i\omega_\gamma$

Wir haben also 2 Lösungen:

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} e^{i\omega_\gamma t}$$

$$x_2(t) = e^{-\gamma t} e^{-i\omega_\gamma t}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der Form:

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega_\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_\gamma t}$$

* Wir benutzen noch mal die Euler Formel

$$e^{\pm i\omega_\gamma t} = \cos\omega_\gamma t \pm i\sin\omega_\gamma t$$

und damit

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left\{\underbrace{(C_1+C_2)}_{A}\cos\omega_\gamma t + \underbrace{[i(C_1-C_2)]}_{B}\sin\omega_\gamma t\right\}$$

also $x(t) = e^{-\gamma t}\left[A\cos\omega_\gamma t + B\sin\omega_\gamma t\right]$

und damit

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t}\left[A\cos\omega_\gamma t + B\sin\omega_\gamma t\right] + \omega_\gamma e^{-\gamma t}\left[-A\sin\omega_\gamma t + B\cos\omega_\gamma t\right]$$

Also: $x(0) = A = x_0$

$$\dot{x}(0) = -\gamma A + \omega_\gamma B = v_0 \longrightarrow B = \frac{v_0+\gamma x_0}{\omega_\gamma}$$

Die Lösung der Gleichung ist also der Form:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left\{x_0\cos\omega_\gamma t + \left[\frac{v_0+\gamma x_0}{\omega_\gamma}\right]\sin\omega_\gamma t\right\}$$

Wie für den ungedämpften harmonischen Ostillator, wir können $x(t)$ in der alternativen Form

$$\boxed{x(t) = C e^{-\gamma t}\sin[\omega_\gamma t + \delta]}$$

schreiben, wobei

$$C^2 = x_0^2 + \frac{(v_0+\gamma x_0)^2}{\omega_\gamma^2}$$

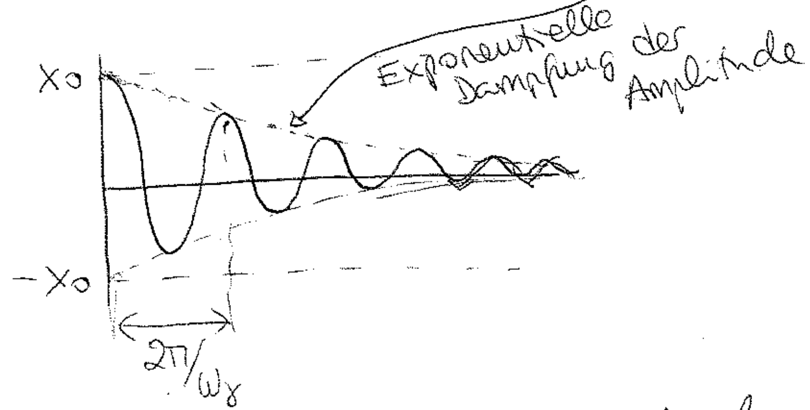
$$\delta = \arctan\left[\frac{\omega_\gamma x_0}{v_0+\gamma x_0}\right]$$

* Wir haben also ~~eine~~ Schwingungen mit Frequenz $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$ → Also die Frequenz der Schwingungen ist wegen der Reibung kleiner

(d.h. die Schwingungen sind langsamer wegen der Reibung, das sollte intuitiv sein!)

Außerdem nimmt die Amplitude der Schwingungen exponentiell ab → $Ce^{-\gamma t}$

Sei $v_0 = 0$, dann:



Die Zeit $\tau = \frac{1}{\gamma}$ wird als Abklingdauer oder Relaxationszeit bezeichnet.

Für $t \gg \tau$ verschwinden die Schwingungen.

* Wir haben also aus der Lösung der Differentialgleichung unsere Intuition bestätigt:
  * Die Oszillationen sind langsamer ($\omega_\gamma < \omega_0$)
  * Die Schwingungen nehmen in der Zeit ab.

* Die Lage sieht anders aus, wenn $\gamma > \omega_0$ (<u>überkritische Dämpfung</u>).

Dann $\gamma^2 > \omega_0^2 \Longrightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma \pm \nu$

Und die 2 Lösungen sind nun:

$$x_1(t) = e^{-(\gamma-\nu)t}$$

$$x_2(t) = e^{-(\gamma+\nu)t}$$

Und die allgemeine Lösung ist:

$$x(t) = c_1 e^{-(\gamma-\nu)t} + c_2 e^{-(\gamma+\nu)t}$$

$$\dot{x}(t) = -(\gamma-\nu) c_1 e^{-(\gamma-\nu)t} - (\gamma+\nu) c_2 e^{-(\gamma+\nu)t}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) &= -(\gamma-\nu)c_1 - (\gamma+\nu)c_2 = v_0 \end{aligned}\right\} \text{von hier bekommen wir } c_1 \text{ und } c_2$$

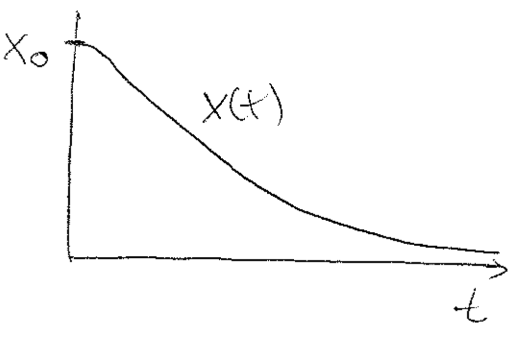
Sei z.B. $v_0 = 0 \longrightarrow c_2 = -\dfrac{(\gamma-\nu)}{(\gamma+\nu)} c_1$

$$\longrightarrow c_1 - \frac{(\gamma-\nu)}{(\gamma+\nu)} c_1 = \frac{2\nu}{\gamma+\nu} c_1 = x_0 \longrightarrow c_1 = \frac{(\gamma+\nu)}{2\nu} x_0$$

$$c_2 = \frac{-(\gamma-\nu)}{2\nu} x_0$$

Und damit

$$x(t) = x_0 \left\{ \frac{(\gamma+\nu)}{2\nu} e^{-(\gamma-\nu)t} - \frac{(\gamma-\nu)}{2\nu} e^{-(\gamma+\nu)t} \right\}$$



$\longrightarrow$ Nun gibt es keine Schwingung. Die Dämpfung dominiert die Dynamik.

• Erzwungene Schwingungen

* Zum Schluß werden wir sehen, was passiert wenn wir eine äußere periodische Kraft auf der Masse üben:

$$m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{Federkraft}} \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\text{Reibungskraft}} + F(t) \longleftarrow \text{äußere Kraft}$$

Die Gleichung ist also der Form:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = g(t)$$

wobei $2\gamma = \frac{\alpha}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ und $g(t) = F(t)/m$

* Wir werden hier eine periodische Kraft der Form

$$g(t) = g_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

betrachten.

* Die Gleichung ist nun inhomogen, also die allgemeine Lösung ist der Form:

$$x(t) = x_H(t) + x_S(t)$$

wobei $x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin[\omega_\gamma t + \delta]$ die Lösung der homogenen Gleichung ist, und $x_S(t)$ eine spezielle Lösung ist. (Bemerkung ⇒ Ich betrachte hier die unterkritische Dämpfung. Die Ideen sind ähnlich für überkritisch.)

* Im Prinzip können wir wie auf S. 173 machen. Hier ist es aber einfacher. Wegen der periodischen Natur der Kraft, können wir einfach sehen, daß eine spezielle Lösung der Form $x_S(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$ hat.

* Gucken wir es, und finden wir was A und α sein müssen.

$$\dot{x}_s(t) = A\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

$$\ddot{x}_s(t) = -A\omega^2\sin(\omega t+\alpha)$$

Damit:

$$\ddot{x}_s + 2\gamma\dot{x}_s + \omega_0^2 x_s = g(t)$$

wird der Form:

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\alpha) + 2\gamma A\omega\cos(\omega t+\alpha) + A\omega_0^2\sin(\omega t+\alpha) = g_0\cos(\omega t+\alpha_0)$$

Also:

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\left[\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha\right] + 2\gamma A\omega\left[\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha\right]$$

$$= g_0\left[\cos\omega t\cos\alpha_0 - \sin\omega t\sin\alpha_0\right]$$

$$\Rightarrow A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\alpha - 2\gamma\omega\sin\alpha\right]\sin\omega t + A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\alpha + 2\gamma\omega\cos\alpha\right]\cos\omega t$$

$$= \left[g_0\cos\alpha_0\right]\cos\omega t + \left[-g_0\sin\alpha_0\right]\sin\omega t$$

Damit

$$A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\alpha - 2\gamma\omega\sin\alpha\right] = -g_0\sin\alpha_0$$

$$A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\alpha + 2\gamma\omega\cos\alpha\right] = g_0\cos\alpha_0$$

Wir schreiben nun die Gleichung um:

$$A\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}\left\{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos\alpha - \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\sin\alpha\right\} = -g_0\sin\alpha_0$$

$$A\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}\left\{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\sin\alpha + \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos\alpha\right\} = g_0\cos\alpha_0$$

Sei
$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\ \cos\beta &= \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \end{aligned}\right\} \beta = \arctan\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}\right)$$

Dann
$$A\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}\left[\underbrace{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}_{-\sin(\alpha-\beta)}\right] = -g_0\sin\alpha_0$$
$$A\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}\left[\underbrace{\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha}_{\cos(\alpha-\beta)}\right] = g_0\cos\alpha_0$$

Damit $\Rightarrow \alpha-\beta=\alpha_0 \longrightarrow \alpha=\alpha_0+\beta$
$$A = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Also
$$x_s(t) = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\sin\left[\omega t+\alpha_0+\beta\right]$$

. Damit ist die endgültige Lösung der Form:
$$\boxed{x(t) = \underbrace{Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_\gamma t+\delta)}_{\text{verschwindet nach } t\gg 1/\gamma} + \underbrace{\frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\sin\left[\omega t+\alpha_0+\beta\right]}_{\text{dominiert für } t\gg 1/\gamma}}$$

. Wir müssen hier bemerken, daß die Anfangsbedingungen des Systems sind nun in den Werten von C und δ. Diese Information verschwindet nach $t\gg 1/\gamma$, d.h. die Dynamik für $t\gg 1/\gamma$

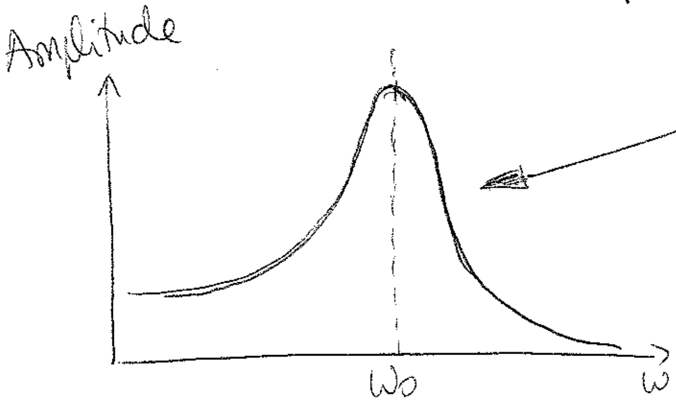
hängt nicht von Anfangsbedingungen ab!

Also für $t \gg 1/\gamma$:

$$x(t) \simeq \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha + \beta)$$

also:
- Die Frequenz der Schwingungen ist nun die von der äußeren Kraft (!!)
- Die Amplitude der Schwingung hängt von ω ab.

$$\text{Amplitude} = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$



Die Amplitude sieht so aus d.h. die Amplitude hat ein Maximum für $\omega = \omega_0$.

Wenn γ kleiner wird, dann ist der Maximum höher (und auch schmaller). Das ist die Idee von <u>Resonanz</u>

Für eine Kraft mit einer bestimmten Frequenz ($\omega = \omega_0$) sind die erzwungenen Schwingungen sehr (sogar extrem) stark.

Das spielt natürlich eine sehr bedeutende Rolle beim Schaukeln.

Die Idee von <u>Resonanz</u> ist sehr wichtig in der Physik, und Ihr wird die sehr oft in eurem Studium treffen.