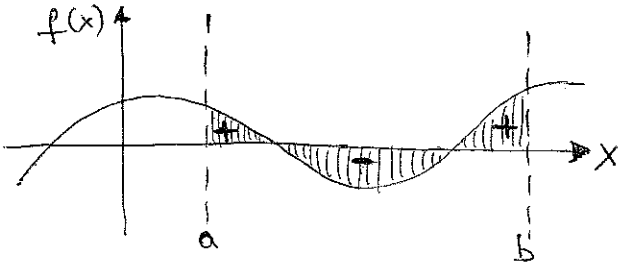
• INTEGRATION

* Das Integral ist eine fundamentelle Operation der Mathematik und der Physik. In den nächsten Vorlesungen werden wir uns damit beschäftigen. Wir werden erstmals die gewöhnliche Integrale auffrischen (die habt Ihr in der Schule gesehen) und wir werden die wichtigste Integrationsmethode einführen. Später werden wir mehr-dimensionale Integrale einführen. Zum Schluss werden wir die Ideen von Kurven- und Flächen-integral diskutieren.

GEWÖHNLICHE INTEGRALE

* Wir fangen mit der Idee des Integrals an.



- Sei eine Funktion f(x)
- a und b sind zwei Stellen auf der x-Achse

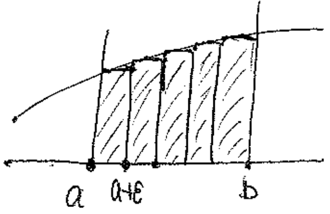
. Die f(x)-Kurve, die x-Achse und die zwei Vertikalen durch a und durch b schließen eine Fläche ein.

(Bemerkung: (Wichtig!) ⇒ Flächenstücke unter der x-Achse zählen nur negativ!)

• Diese Fläche wird von dem Integral über x von a bis b von f(x) gegeben:

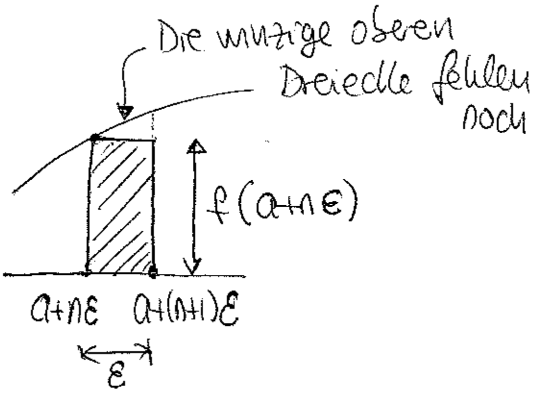
$$\text{Fläche} = \mathbb{I}(a,b) = \underbrace{\int_a^b}_{\text{Integrationsgrenzen}} \underbrace{dx}_{\text{Differenzial}} \; \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}}$$

* Wir können uns das Integral als eine Summe von vielen vertikalen Streifen vorstellen:



· gucken wir eine Streife: Die Fläche der Streife ist einfach

$$\epsilon f(a+n\epsilon)$$



Die Gesamtfläche der Streifen ist also

$$\sum_{n=0}^{N-1} \epsilon f(a+n\epsilon) \qquad \text{wobei } a+N\epsilon=b$$

Wenn wir ε kleiner und kleiner nehmen (und damit N größer und größer) wird also die Gesamtfläche der Streifen besser und besser das Integral ergeben. Also, das Integral wird eigentlich als ein Limes eines Summe definiert:

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty\\ a+N\epsilon=b}} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon f(a+n\epsilon)$$

· Das Integral ist also nicht mehr als eine Summe

· Das Integral erfüllt mehrere wichtige (und nützliche!) Eigenschaften:

* $\int_b^a dx\, f(x) = -\int_a^b dx\, f(x)$ ⇒ Das läßt sich einfach mit Hilfe der Streifen erklären, da nun wir $(-\epsilon)$ in der Summe haben (wir summen rückwärts)

* Deswegen $\int_a^a dx\, f(x) = 0$

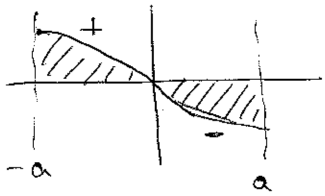
- Sei α eine Konstante.

Dann $$\int_a^b dx\ \alpha = (b-a)\alpha$$

- Sei $f(x)$ solch daß $f(x) = -f(-x)$

(Bemerkung: Solche Funktionen heißen ungerade Funktionen
Die, daß $f(x) = +f(-x)$ erfüllen, heißen gerade Funktionen)

Dann $$\int_{-a}^{a} dx\ f(x) = 0$$



- Linearität:

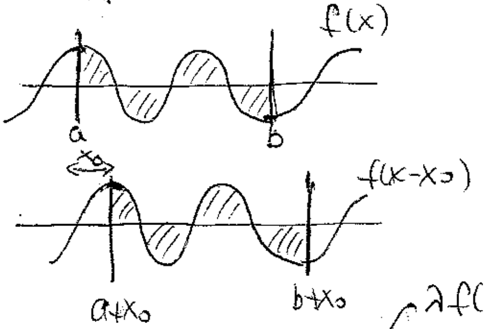
$$\int_a^b dx \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] = \alpha \int_a^b dx\ f(x) + \beta \int_a^b dx\ g(x)$$

- Auch wichtig:

$$\int_a^b dx\ f(x) + \int_b^c dx\ f(x) = \int_a^c dx\ f(x)$$

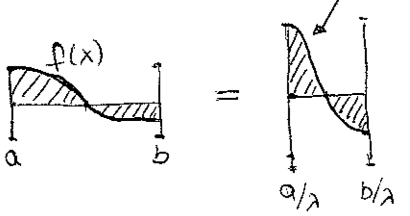
- Und noch ein Paar Tricks, die sehr oft vorkommen:

  - $$\int_a^b dx\ f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\ f(x-x_0) \Leftarrow$$



Eine Verschiebung der Funktion ändert die Fläche nicht!

  - $$\int_a^b dx\ f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\ f(\lambda x) \Leftarrow$$



Wenn wir die x-Achse re-skalieren $a \to a/\lambda$
$b \to b/\lambda$
müssen wir die Funktion
auch re-skalieren, und zwar $f(x) \to \lambda f(\lambda x)$
Und damit wird das Integral erhalten.

* Hauptsatz der Integration

· Integration und Ableitung sind eigentlich miteinander gekoppelt. Gucken wir es.

· Das Integral $I(a,b) = \int_a^b dx\, f(x)$ ist eigentlich eine Funktion von 2 Variablen: a und b.

· Wir verschieben b ein bisschen: $b \to b+\epsilon$

$$I(a,b+\epsilon) = \int_a^{b+\epsilon} dx\, f(x) = \underbrace{\int_a^b dx\, f(x)}_{I(a,b)} + \underbrace{\int_b^{b+\epsilon} dx\, f(x)}_{\simeq \epsilon f(b) \Rightarrow \text{nur eine Streife}}$$

· Also $\dfrac{I(a,b+\epsilon) - I(a,b)}{\epsilon} = f(b)$

· Aber auf S. ⑫ haben wir gesehen, daß $\dfrac{\partial I}{\partial b}(a,b) = \lim_{\epsilon \to 0} \dfrac{I(a,b+\epsilon) - I(a,b)}{\epsilon}$

also $\dfrac{\partial I}{\partial b}(a,b) = f(b)$

· Und nun kommt die wichtige Idee von <u>Stammfunktion</u>. Eine Stammfunktion F zu einer Funktion f erfüllt $F' = f$, also die Ableitung von F ist f.

Ganz klar:

$$I(a,b) = F(b) + C(a)$$

weil $\dfrac{\partial I}{\partial b} = \dfrac{dF}{db} = f(b)$

· Wir müssen nun C(a) bestimmen. Aber das ist sehr einfach, weil $I(a,a) = 0 \Longrightarrow F(a) + C(a) = 0 \to C(a) = -F(a)$

Also $\boxed{I(a,b) = F(b) - F(a) = \int_a^b dx\, f(x)} \Rightarrow$ Hauptsatz der Integration

- Die Integration ist also eine Art "<u>Anti-Ableitung</u>".

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dx\, \frac{dF(x)}{dx} = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = F(b) - F(a)$$

Wir haben also zwei verschiedene Fragestellungen miteinander verknüpft:
  * Die Frage nach der Fläche unter der Funktion $f(x)$
  * Die Frage nach der Stammfunktion F, solch daß $F' = f$.

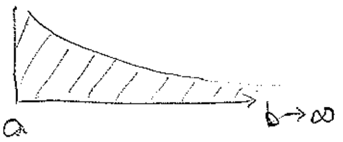
* Die Ableitung ist eine mechanische Operation, man muss nur einige Regeln kennen, und dann kommt alles mechanisch. Die Integration ist dagegen mehr eine Kunst. Trotzdem gibt es Tricks und Integrationsmethoden, die wir später in dieser Vorlesung sehen werden.

(<u>Bemerkung</u>: für eine gegebene Funktion man kann immer die Ableitung finden, dagegen ist die Integration nicht immer analytisch machbar. Man muss dann numerische Verfahren (also Computers) zuwenden. Aber das werden wir hier nicht sehen.)

- Nur ein letzter Punkt über Integralen in allgemeinen.

Mehrmals liegt eine der Integrationsgrenzen in ∞; z.B:

$$\int_a^\infty dx\, f(x) \equiv \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$



Die Fläche streckt sich bis Unendliche.

Diese Integrale können existieren oder nicht existieren.

Die sind die sogen. <u>Uneigentliche</u> Integrale.

z.B: $$\int_1^\infty dx\, x^{-\lambda} \underset{\lambda \neq 1}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{b\to\infty} \int_1^b dx\, \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right] = \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{b^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}\right\}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{falls } \lambda < 1 \longrightarrow \text{nicht existiert} \\ \frac{1}{\lambda-1} & \text{falls } \lambda > 1 \longrightarrow \text{existiert} \end{cases}$$

* Anwendungen der Integralen

· Die Integrale haben unzählige Anwendungen in der Physik. Wir werden hier nur einige Beispiele erwähnen.

• Bewegungsgleichung mit zeitabhängiger Kraft

* Aus der 2. Newton-gesetz haben wir, daß

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F \longleftarrow \text{Wir werden nun annehmen, daß } F = F(t) \leftarrow \text{zeitabhängig.}$$

Wir suchen nach $v(t)$.

Also, wir integrieren beide Seiten:

$$\int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} dt \; F(t)$$

$$\Big\Downarrow \text{Hauptsatz}$$

$$v(t) - v(t_0) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} F(t) \Longrightarrow \boxed{v(t) = v(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} F(t)}$$

Mindestens Formal haben wir die Lösung gefunden. Wenn wir $F(t)$ kennen, dann können wir versuchen, das Integral zu machen. Wir suchen also nach der Stammfunktion $P(t)$ (solch daß $\frac{dP}{dt} = F$) und dann

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{m} \left[P(t) - P(t_0) \right]$$

• Bewegungsgleichung mit x-Abhängiger Kraft

• Wir betrachten nun ein 1D-Problem (entlang x).
Die Bewegungsgleichung ist also

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \longleftarrow$$ Die Kraft ist nun x-abhängig

Sei F(x) eine konservative Kraft : $F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$

Dann $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d}{dx}V(x)$$

(**Bemerkung**: $-V(x)$ ist also eine Stammfunktion von $F(x)$)

• Wir multiplizieren beide Seiten mal $\frac{dx}{dt}$:

$$\underbrace{m\frac{d^2}{dt^2}x\;\frac{d}{dt}x}_{m\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]} = -\frac{dV}{dx}\,\frac{dx}{dt} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenregel}}}{=} -\frac{dV}{dt}$$

Also $$\frac{d}{dt}\left\{\underbrace{\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)}_{E\,=\,\text{Energie}\,=\,\text{konstant}}\right\} = 0 \;\Leftarrow$$ Das ist nicht mehr als die Energieerhaltung (S. ㉛)

Also $$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E-V(x)} \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{E-V(x)}}$$

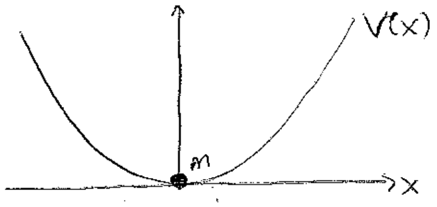
$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t} dt' = \pm\int_{x_0=x(t_0)}^{x} dx'\,\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{E-V(x')}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{t = t_0 \pm \int_{x_0}^{x} dx'\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{E-V(x')}}} \longrightarrow$$

Mindestens formal haben wir nach t(x) gelöst. Wir wollen x(t) ~~aber~~ das ist nicht immer einfach zu invertieren.

* Sehen wir ein Beispiel.

Sei $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$ (also das Federpotential)



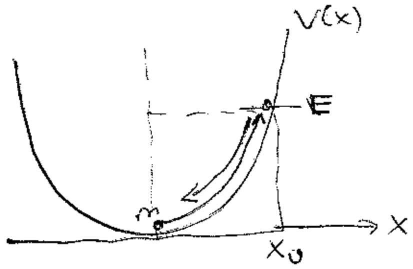
· Am $t_0 = 0$, sei $x = 0$, und $v_0 > 0$

also $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = +\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E} = v_0$

Die Lösung mit "+"

· Also $E = \frac{m}{2} v_0^2$ → die ursprüngliche Kinetische Energie (am Anfang $x = 0$, also $V = 0$)

· Etwas interessantes passiert wenn $E = V(x_u)$ für einen gegebenen Punkt x_v. An dem Punkt geht $\sqrt{E - V(x)}$ zu Null. Für $x > x_u$ ist $E - V(x_u) < 0$ und der Würzel macht kein Sinn (Ich erinnere euch unsere Diskussion auf S. (57)). Dieses Punkt ist ein <u>Umkehrpunkt</u>.



· Die Masse m geht bis zum Punkt x_u und dann kehrt zurück. Am Punkt x_u, $v = 0$

· Für die Rückkehrbewegung gilt nun die Lösung

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)}$$

, also $v < 0$.

• Integrationsmethoden

* Wie schon erwähnt, die Integration ist etwa eine Kunst. Aber es gibt einige Verfahren die uns helfen können, das Integral zu lösen. Wir werden nun mehreren diesen Verfahren einführen.

* Partialbruchzerlegung

· Manche Integranden, insbesondere Produkte von Brüchen, lassen sich additiv in Terme zerlegen, die einfacher zu integrieren sind.

z.B.: wir wollen $\int_a^b dx\, f(x)$ für $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ lösen.

Wir suchen also nach der Stammfunktion von $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zerlegung}}}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x^2}$$

wobei A, B sind Polynome

$$= \frac{A(1+x^2) + Bx}{x(1+x^2)},$$

Also $A(1+x^2) + Bx = A + x\,(B + Ax) = 1$ und zwar für alle x.

Dann: $\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -Ax = -x \end{array}\right\}$ also $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$

. Die Stammfunktion ist also

ohne Integrationsgrenzen suchen wir nach einer Stammfunktion (unbestimmten Integrale)

$$F(x) = \int dx\, f(x) =$$

$$= \int dx\, \frac{1}{x} - \int dx\, \frac{x}{1+x^2}$$

* Wir suchen also nach der Stammfunktion von

- $f_1(\cancel{x}) = \frac{1}{x} \longrightarrow F_1(x) = \ln x$ weil $\frac{dF_1}{dx} = \frac{1}{x}$ (Sieh S. (80))

- $f_2(x) = \frac{x}{1+x^2} \longrightarrow F_2(x) = +\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

weil $\frac{dF_2}{dx} = \frac{+1}{2}\frac{d}{dx}\ln(1+x^2) \overset{\text{Kettenregel}}{=} +\frac{1}{2}\,\frac{2x}{1+x^2} = \frac{+x}{1+x^2}$

- Also $F(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

* Partielle Integration

- Die partielle Integration wird sehr oft benutzt.

Sagen wir, daß man den Integrand f(x) als ein Produkt der Form: $f(x) = \left(\frac{du(x)}{dx}\right)v(x)$ schreiben kann, wobei u(x) und v(x) auch Funktionen sind.

* Wegen Produktregel (S. ⑨)

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = \left(\frac{du(x)}{dx}\right)v(x) + u(x)\left(\frac{dv(x)}{dx}\right)$$

also $f(x) = \left(\frac{du(x)}{dx}\right)v(x) = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - u(x)\frac{dv(x)}{dx}$

* Also:

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dx \left\{\left(\frac{du}{dx}\right)v\right\} = \int_a^b dx\, \frac{d}{dx}(uv) - \int_a^b dx\, u(x)\frac{dv}{dx} \overset{\text{Hauptsatz}}{=}$$

$$= (u(x)v(x))_a^b - \int_a^b dx\, u(x)\frac{dv}{dx}$$

diese Schreibweise bedeutet

$(g(x))_a^b \equiv g(b) - g(a)$

Also:

$$\boxed{\int_a^b dx\left(\frac{du(x)}{dx}\right)v(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b dx\, u(x)\frac{dv(x)}{dx}}$$

$\Downarrow$

das heißt partielle Integration

* Was haben wir gewonnen? Eigentlich viel wenn das neue Integral einfacher zu lösen ist.

z. B.

$$\int_a^b dx\, \ln(x) = \int_a^b dx \left[\frac{dx}{dx}\right] \ln x \overset{u=x,\ v=\ln x}{\downarrow \atop =} (x \ln x)_a^b - \int_a^b dx\, x \underbrace{\frac{d}{dx} \ln x}_{1/x}$$

$$= (x \ln x)_a^b - \int_a^b dx$$

$$= [b \ln b - a \ln a] - (b-a)$$

* Wie gesagt, die partielle Integration taucht sehr oft auf, also bitte merken!

---

* Substitution ← Diese Methode taucht auch sehr oft auf.

· Wir wollen wie immer das Integral $I = \int_a^b dx\, f(x)$ lösen. Manchmals ist es eine gute Idee, anstatt die Variable x, eine andere Variable (nennen wir sie "s") anzuwenden.

Also
$$\left\{\begin{array}{l} x \longrightarrow x(s) \\ dx \longrightarrow \left(\frac{dx}{ds}\right) ds \\ \int_a^b \longrightarrow \int_{s(a)}^{s(b)} \end{array}\right\} \swarrow$$

wir müssen alle diese Änderungen machen. Wir schreiben x als Funktion von s, dx al Funktion von ds, und wir ändern ebenfalls die Integrationsgrenzen.

* Sehen wir ein Beispiel

$$\int_0^R dx\, \sqrt{R^2 - x^2} = R \int_0^R dx \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \overset{\swarrow}{=}$$

$x = R \sin\phi \longrightarrow \phi(x) = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)$

$dx = \left(\frac{dx}{d\phi}\right) d\phi = R \cos\phi\, d\phi$

$\int_0^R \longrightarrow \int_{\phi(0)=0}^{\phi(R)=\pi/2}$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} d\phi\, \cos\phi \sqrt{1 - \sin^2\phi} = R^2 \int_0^{\pi/2} d\phi\, \cos^2\Phi$$

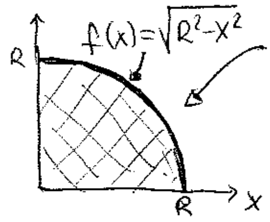
$$= R^2 \int_0^{\pi/2} d\phi \left\{ \frac{\cos(2\phi) + 1}{2} \right\} = \frac{R^2}{2} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\phi\, \cos 2\Phi + \int_0^{\pi/2} d\Phi \right\} =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} d\Phi \cos 2\Phi\right\} \overset{\swarrow}{=}$$

$$\theta = 2\Phi \qquad d\phi = \frac{\cancel{2}d\theta}{2} \qquad \int_0^{\pi/2} \longrightarrow \int_0^{\pi}$$

$$= \frac{R^2}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2}\cos\theta\right\} = \frac{R^2}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\sin\theta)_0^{\pi}\right\} = \frac{\pi R^2}{4}$$

Das sollte keine Überraschung sein, weil $\int_0^R dx\sqrt{R^2-x^2}$ ist



ein Viertel der Fläche eines Kreises, also doch $\pi R^2/4$.

---

* Differenzieren nach Parameter

* Dieser Trick ist besonders nützlich für Integrale mit exponentiellen Funktionen. Also bevor ich diese Methode erkläre, werde ich euch einige Sachen über die exponentielle Funktion erklären.

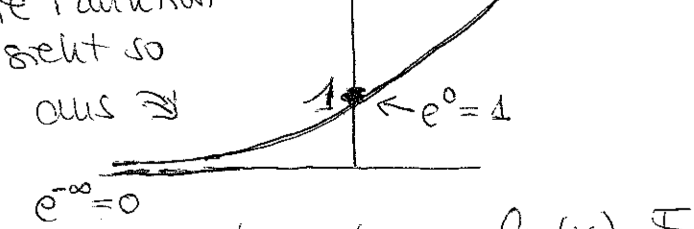
- Die exponentielle Funktion $\exp(x)$ oder e^x ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) \qquad \text{mit} \quad f(0) = 1$$

Also die exponentielle Funktion ist ihre eigene Stammfunktion:

$$\left\{\begin{aligned} \int dx\, e^x &= e^x \\ \frac{d}{dx} e^x &= e^x \end{aligned}\right\}$$

Die Funktion sieht so aus ⇒



- Die e^x-Funktion und der Logarithmus $\ln(x)$-Funktion sind miteinander verknüpft:

wir haben das auf S. (78) angewendet

$$y = e^x \longrightarrow x = \ln y$$

$$\text{also} \quad \frac{dy}{dx} = e^x = y \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}}$$

- Die e^x-Funktion erfüllt daß

$$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$$

(Bemerkung: das ist ganz einfach zu zeigen; sei $f = \frac{e^{x+y}}{e^y}$
dann $\frac{df}{dx} = f$, also $f = e^x$, also $e^{x+y} = e^x e^y$)

- Diese Eigenschaft ergibt eine wichtige Eigenschaft der $\ln(x)$-Funktion

$$\text{Seien } \left.\begin{array}{l} z = e^{x+y} \\ r = e^x \\ s = e^y \end{array}\right\} \quad z = rs$$

$$\text{dann } \left.\begin{array}{l} x+y = \ln z \\ x = \ln r \\ y = \ln s \end{array}\right\} \ln r + \ln s = \ln z$$

$$\text{also} \quad \boxed{\ln(rs) = \ln r + \ln s}$$

- Die e^x-Funktion taucht in vielen Problemen der Physik auf. z.B. der Radioaktivezerfall eine radioaktiven Substanz wird durch eine Gleichung der Form

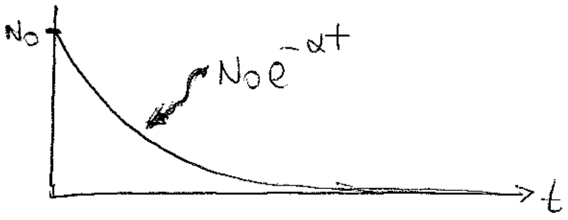
$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N(t) \qquad N(t) = N_0$$

beschrieben, wobei $\left\{\begin{array}{l} N \equiv \text{Anzahl der gebliebenen nicht zerfallenden Atomen} \\ \alpha \equiv \text{Zerfallsrate} \end{array}\right.$

Dann $N(t) = N_0 e^{-\alpha t}$, weil

$$\frac{d}{dt} N(t) = N_0 \frac{d}{dt} e^{-\alpha t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} -\alpha N_0 e^{-\alpha t} = -\alpha N(t)$$

und das sieht so aus $\Longrightarrow$



• Ok. Nun wissen wir schon was die e^x-Funktion ist. Wir kehren nun an der Methode des Differenzierens nach Parameter zurück.

. Per Definitionem: $\int dx\, e^x = e^x$

Also $\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x} =$ ← $y = \alpha x$, $dx = \frac{1}{\alpha} dy$, $\int_0^\infty \longrightarrow \int_0^\infty$

$$= \int_0^\infty dy\, \frac{1}{\alpha} e^{-y} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty dy\, e^{-y} =$$

← $\frac{d}{dy} e^{-y} \overset{\text{Kettenregel}}{=} -e^{-y}$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-y}\right]_0^\infty = -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{\alpha}$$

• Wenn man kennt daß

$$\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha}$$

dann kennt man alle Integrale der Form $\int_0^\infty dx\, x^n e^{-\alpha x}$ und zwar mit Hilfe des "Differenzierens nach Parameter". Das geht sehr einfach:

$\frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\alpha x} \underset{\text{Kettenregel}}{=} -x e^{-\alpha x}$

$$\int_0^\infty dx\, x\, e^{-\alpha x} = \int_0^\infty dx\, \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-e^{-\alpha x}\right) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}\right] = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha^2}$$

Und genauso:

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-\alpha x} = \int_0^\infty dx\, x^{n-1}\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)e^{-\alpha x} = \int_0^\infty dx\, x^{n-2}\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)e^{-\alpha x} =$$

$$= \cdots = \underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)}_{n\text{ Mal}} \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}}_{1/\alpha} = (-1)^n\left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Also $\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = n!$ (Ich erinnere euch, daß $n! \equiv n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$)

* Es gibt viele andere Tricks (wie gesagt die Integration ist eine Kunst), aber wir können hier keine vollständige Liste erwähnen.

* Wie schon erwähnt, mehrmals ist es nicht möglich eine analytische Lösung zu finden, und manchmal existieren die Lösungen aber die sind ziemlich kompliziert (z.B. als Funktion der sogen. spezielle Funktionen, die wir hier nicht erklären werden).

Deswegen existieren Bücher mit Sammlungen von Integralen (bestimmte und unbestimmte), z.B. das Buch von Gradsteyn und Ryzhik ("Table of integrals, series and products").

Auch analytische Lösungen kann man mit Hilfe von Programme wie Mathematica oder Maple.

* Außerdem, findet man viel Mals Integrale ohne analytische Lösungen. Dann muß man numerische Verfahren (also Computers) anwenden, aber hier werden wir keine numerische Verfahren erklären.

* Aber in dieser Vorlesung werden wir nur relativ einfache Integrale behandeln. Trotzdem wollte ich euch warnen, daß im allgemeinen so einfach ist die Integration nicht!