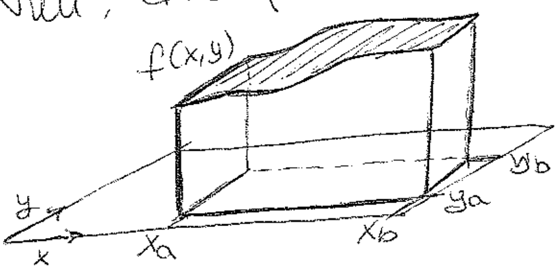
• MEHR-DIMENSIONALE INTEGRALEN

• Bisher haben wir nur Integralen von Funktionen einer Variable $f(x)$ gesehen. Wir werden nun die Idee von Integralen zu Funktionen mehrerer Variablen erweitern.

• ZWEI-DIMENSIONALE INTEGRALEN

• Wir werden erstmal Funktionen $f(x,y)$ betrachten.
Auf Seite 69 haben wir das Integral $\int_a^b dx\, f(x)$ als die Fläche zwischen der $f(x)$-Kurve, die x-Achse, und die 2 Vertikalen $x=a$ und $x=b$ definiert.
Nun, die $f(x,y)$ definiert eine Fläche. Nun das Integral definiert das Volumen zwischen:

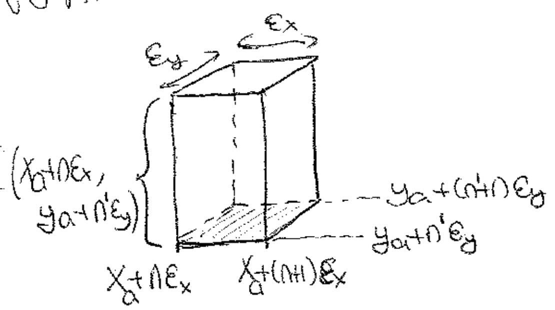


* Die $f(x,y)$-Fläche
* Die xy-Ebene
* Die 4 Ebenen: $\begin{cases} x = x_a \\ x = x_b \\ y = y_a \\ y = y_b \end{cases}$

Man schreibt

$$I\left[(x_a,y_a),(x_b,y_b)\right] = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a}^{y_b} dy\, f(x,y)$$

• Auf Seite 70 haben wir das Integral von $f(x)$ als eine Summe von vielen vertikalen Streifen verstanden. Wir können nun genauso handeln, aber nun anstatt vertikalen Streifen haben wir vertikalen Parallelepipeden:



Das Volumen des Parallelepipeds ist also

$$\underbrace{\epsilon_x \epsilon_y}_{\text{Basis des Parallelepipeds}} \underbrace{f(x_a+n\epsilon_x,\, y_a+n'\epsilon_y)}_{\text{Höhe des Parallelepipeds.}}$$

* Das gesamte Volumen der Parallelepipeden ist also

$$\sum_{n=0}^{N_x-1} \epsilon_x \sum_{n'=0}^{N_y-1} \epsilon_y \; f(x_a+n\epsilon_x, y_a+n\epsilon_y) \qquad \text{wobei} \begin{cases} x_a+N_x\epsilon_x = x_b \\ y_a+N_y\epsilon_y = y_b \end{cases}$$

* Wie für $f(x)$, werden wir nun $\epsilon_{x,y}\to 0$, $N_{x,y}\to\infty$ nehmen, und damit

$$\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a}^{y_b} dy \; f(x,y) = \lim_{\substack{\epsilon_x\to 0\\ N_x\to\infty}} \lim_{\substack{\epsilon_y\to 0\\ N_y\to 0}} \sum_{n_x=0}^{N_x-1}\epsilon_x \sum_{n_y=0}^{N_y-1}\epsilon_y \; f(x_a+n_x\epsilon_x, x_b+n_y\epsilon_y)$$
$$x_b = x_a+N_x\epsilon_x \quad y_b = y_a+N_y\epsilon_y$$

* Wie immer das Integral ist nicht mehr als eine Summe. Deswegen ist die genaue Ordnung der Integralen unwichtig, also

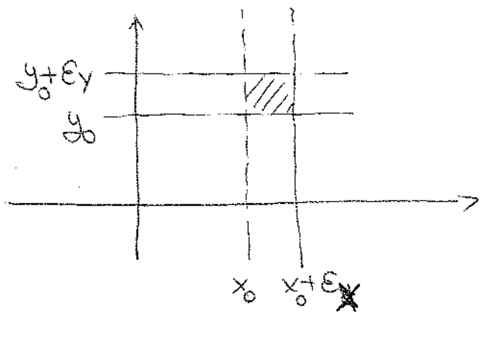
$$\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a}^{y_b} dy \; f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_a}^{x_b} dx \; f(x,y)$$

* <u>Integration in Polarkoordinaten</u>

* Bisher haben wir nur Kartesische Koordinaten benutzt. Wir können aber anstatt (x,y) auch (ρ,φ) (d.h. die Polarkoordinaten) anwenden. Wie sieht also das Integral in Polarkoordinaten aus?

* Um das zu sehen, sollten wir zu der Idee der Parallelepipeden zurückkehren. Wir haben die (x,y)-Ebene in kleinen Oberflächenelemente geteilt $\to \epsilon_x, \epsilon_y$. Die Fläche des Flächenelements war

$$\Delta S = \epsilon_x \epsilon_y$$

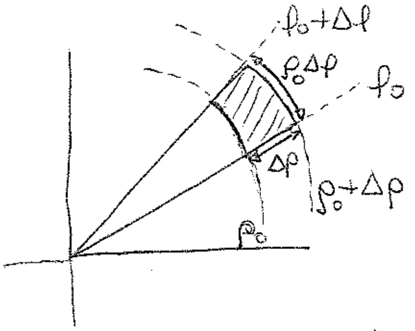


und damit war das Volumen des Parallelepipeds

$$\Delta S \, f(x_0, y_0)$$

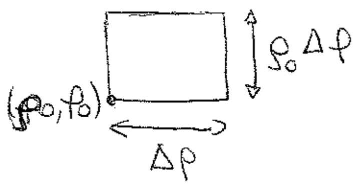
* Die Fläche ΔS wird also definiert von den Kurven mit
  * $x = x_0$
  * $y = y_0$
  * $x = x_0 + \epsilon_x$
  * $y = y_0 + \epsilon_y$

· Genauso können wir mit den Polarkoordinaten machen:



. Die 4 Kurven $\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \varphi = \varphi_0 \\ \rho = \rho_0 + \Delta\rho \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \end{cases}$ definieren auch eine Fläche ΔS

Wenn $\Delta\rho$ und $\Delta\varphi$ zu Null gehen, nähert sich die Fläche ΔS an ein~~er~~ Rechteck:



$\longrightarrow$ Fläche: $\Delta\rho\, \rho_0 \Delta\varphi = \Delta S$

Und damit ist das Volumen des Parallelepipeds

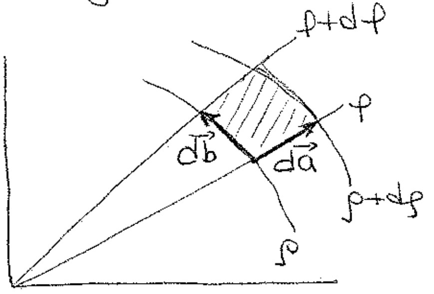
$$\Delta S\, f(\rho_0, \varphi_0) = \rho_0 \Delta\rho \Delta\varphi\, f(\rho_0, \varphi_0)$$

* Damit ist das Integral in Polarkoordinaten

$$\boxed{\int_{\rho_a}^{\rho_b} \rho\, d\rho \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi\ \ f(\rho, \varphi)}$$

* Integration in Polarkoordinaten (andersrum)

* Wir werden nun das Integral in Polarkoordinaten andersrum betrachten. Das wird uns erlauben die Idee von 2D-Integral zu verallgemeinern. Wir definieren 2 Vektoren $\vec{da}$ und $\vec{db}$ wie in der Abbildung. Wenn $d\rho, d\varphi \to 0$ wird die Fläche des Rechtecks



$$dS = |\vec{da} \times \vec{db}|$$

(per Definitionem von Kreuzprodukt S. 5)

* $\vec{da}$ geht in Richtung von φ konstant, dann

$$\frac{(\vec{r}+\vec{da})-\vec{r}}{d\rho} \underset{d\rho\to 0}{\overset{\lim}{=}} \frac{\partial}{\partial\rho}\vec{r}$$

(per Definitionem von partiellen Ableitung, S. 12)

Damit $$\vec{da} = d\rho \frac{\partial \vec{r}}{\partial\rho} = d\rho\left[\frac{\partial x}{\partial\rho}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\rho}\vec{e}_y\right]$$

Genauso $$\frac{(\vec{r}+\vec{db})-\vec{r}}{d\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{r}$$

Also $$\vec{db} = d\varphi\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right] = d\varphi\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\vec{e}_y\right]$$

Also $$\vec{da}\times\vec{db} = d\rho\, d\varphi\left[\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\varphi} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\rho}\right]\vec{e}_z$$

Das kann als eine Determinante geschrieben werden

$$\vec{da}\times\vec{db} = d\rho\, d\varphi \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} \vec{e}_z$$

(wir werden die Idee von Determinante später in der Vorlesung über Matrizen genauer sehen)

$\Downarrow$

für einen Crash-Kurs über Determinante siehe S. 87'

Und damit $$dS = d\rho\, d\varphi \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial y/\partial\rho \\ \partial x/\partial\varphi & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix}$$

es geht weiter auf S. 88 $\Longrightarrow$

• DETERMINANTEN (CRASH-KURS)

• Wie schon erwähnt, werden wir die Idee von Determinante später in dieser Vorlesungsreihe viel genauer lernen.

• Hier wollte ich nur die Idee von Determinant nur ganz schnell vorstellen, da Determinanten in 2D und 3D Integralen auftauchen:

* Determinant: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

* Determinant: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

$$= a_1 \left[b_2 c_3 - b_3 c_2 \right] - a_2 \left[b_1 c_3 - b_3 c_1 \right] + a_3 \left[b_1 c_2 - b_2 c_1 \right]$$

* Im Moment brauchen wir nicht mehr zu wissen.

* Da $x = \rho \cos\varphi$
  $y = \rho \sin\varphi$

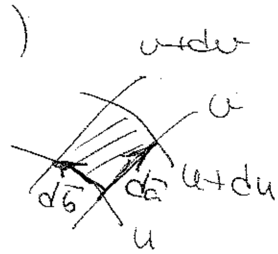
$$dS = d\rho\, d\varphi \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

wie wir schon gesehen haben.

* Aber diese Herleitung des Flächenelements dS erlaubt uns die Idee von 2D-Integral zu verallgemeinern.

Anstatt x, y wir nehmen nun 2 andere Variablen

$u = u(x,y)$ (z.B. vorher $u = \rho$, $v = \varphi$)
$v = v(x,y)$



· Dann dS wird definiert von den Kurven

Dann $d\vec{a} = du \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u} = du\,(\partial_u x, \partial_u y)$

$d\vec{b} = dv \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v} = dv\,(\partial_v x, \partial_v y)$

und $dS = du\,dv\,(\partial_u x\, \partial_v y - \partial_v x\, \partial_u y)$

$$\boxed{dS = du\,dv \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobi-Determinante } J} = du\,dv\,|J|}$$

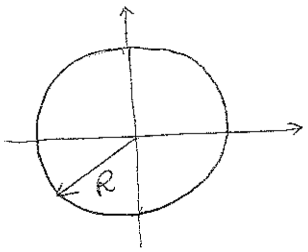
* Für Polarkoordinaten

$J = \rho$

* Wir können also anstatt x, y andere (vielleicht bequemere) Variablen u und v anwenden. Wir müssen aber den richtigen Flächenelement anwenden, und zwar mit der richtigen Jacobi-Determinante.

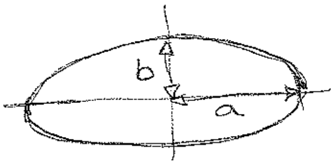
* BEISPIELE

· Fläche eines Kreises



$$S=\underbrace{\int_0^R \rho\, d\rho}_{\left[\rho^2/2\right]_0^R = R^2/2}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \qquad \boxed{S=\pi R^2}$$

· Fläche einer Ellipse



Wir benutzen die sogen. elliptische Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= \epsilon \rho \cos\varphi \\ y &= \frac{1}{\epsilon}\rho \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{\epsilon^2}x^2 + \epsilon^2 y^2 = \rho^2$$

wobei $\left.\begin{aligned} b &= R/\epsilon \\ a &= R\epsilon \end{aligned}\right\}$ also $\epsilon = \sqrt{a/b}$, $R = \sqrt{ab}$

Die Koordinate ρ nimmt alle Werte zwischen 0 und R und $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Wir rechnen nun die Jakobi-Determinante:

$$* \quad \begin{aligned} \partial_\rho x &= \epsilon \cos\varphi \\ \partial_\rho y &= \frac{1}{\epsilon}\sin\varphi \end{aligned} \quad \Big\| \quad \begin{aligned} \partial_\varphi x &= -\epsilon\rho\sin\varphi \\ \partial_\varphi y &= \frac{1}{\epsilon}\rho\cos\varphi \end{aligned}$$

Dann $J = \begin{vmatrix} \epsilon\cos\varphi & (1/\epsilon)\sin\varphi \\ -\epsilon\rho\sin\varphi & (1/\epsilon)\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$ (also wie für Polarkoordinaten)

Dann $S = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 = \pi a b \longrightarrow \boxed{S = \pi a b}$

• 3D-INTEGRALE (VOLUMENINTEGRALE)

• Wir betrachten nun Funktionen der Form $f(x,y,z)$. Nun ist die geometrische Darstellung des Integrals kompliziert, da x,y,z plus $f(x,y,z)$ bauen einen 4D-Raum! Die Idee ist aber ähnlich.

Vorher: * In 1D → haben wir die x-Achse in kleinen Linienelemente Δx geteilt.

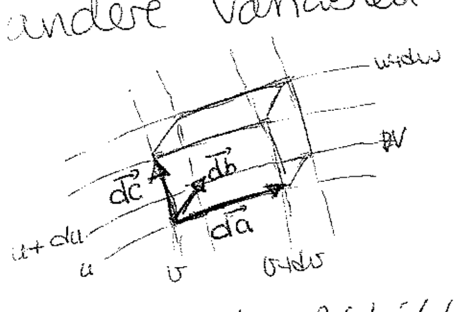
* In 2D → haben wir die xy-Ebene in kleinen Flächenelemente $\Delta S = \Delta x\, \Delta y$ geteilt.

Nun in 3D müssen wir den 3D-Raum in kleinen Volumenelemente $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ teilen, so daß

$$\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{z_a}^{z_b} dz\, f(x,y,z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ N_x \to \infty \\ x_a + N_x \Delta x = x_b}} \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ N_y \to \infty \\ y_a + N_y \Delta y = y_b}} \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ N_z \to \infty \\ z_a + N_z \Delta z = z_b}} \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \sum_{n_z=0}^{N_z-1} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, f\left[x_a + n_x \Delta x,\, y_a + n_y \Delta y,\, z_a + n_z \Delta z\right]$$

Und wie immer ist das Integral einfach eine Summe, also die Ordnung der Integrale ist egal.

* Genau wie für die 2D Integrale, können wir anstatt x,y,z andere Variablen $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ anwenden.



Die Idee ist ähnlich wie in 2D. Für sehr kleine du, dv, dw, haben wir ein Volumen-element wie in der Abbildung. Wir definieren dann 3 Vektoren $\vec{da}, \vec{db}, \vec{dc}$ wie in der Abbildung. Entlang $\vec{da}$ sind v,w konstant, entlang $\vec{db}$ sind u,w konstant, und entlang $\vec{dc}$ sind u,v konstant.

- Also
$$\vec{da} = du\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = du\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$\vec{db} = dv\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = dv\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$\vec{dc} = dw\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = dw\left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right)$$

- Dann, aus der Definition von Spatprodukt (S. 7)

Volumen des Parallelepipeds $= |\vec{da}\cdot(\vec{db}\times\vec{dc})| = dV$

wobei:
$$\vec{da}\cdot(\vec{db}\times\vec{dc}) = du\,dv\,dw\left\{\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right\}$$

Das kann auch als eine Determinante geschrieben werden

$$\vec{da}\cdot(\vec{db}\times\vec{dc}) = du\,dv\,dw\,\underbrace{\begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z \\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z \\ \partial_w x & \partial_w y & \partial_w z \end{vmatrix}}_{} \rightarrow \text{JACOBI-DETERMINANTE } J$$

Also $\boxed{dV = du\,dv\,dw\,|J|}$

- Zusammengefaßt, wenn wir mit Variablen x, y, z arbeiten, und dann wollen mit Variablen $u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$ arbeiten, dann

$$\boxed{dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_u y & \partial_u z \\ \partial_v x & \partial_v y & \partial_v z \\ \partial_w x & \partial_w y & \partial_w z \end{vmatrix} du\,dv\,dw}$$

* Diese Idee kann <u>ganz allgemein</u> verallgemeinert werden.

Sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow$ eine Funktion von n Variablen.

Wir wollen $\underbrace{\int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n}_{\substack{n\text{-dimensionales} \\ \text{Integral}}} f(x_1 \dots x_n)$

Wir ändern die Variablen: $q_j(x_1, \dots, x_n)$ wobei $j = 1, \dots, n$

Dann:

$$\boxed{dx_1 \dots dx_n = dq_1 \dots dq_n \begin{vmatrix} \partial_{q_1} x_1 & \dots & \partial_{q_1} x_n \\ \vdots & & \\ \partial_{q_n} x_1 & \dots & \partial_{q_n} x_n \end{vmatrix}}$$

(wir werden später in dieser Vorlesungsreihe sehen, wie man so ein Determinant schreiben kann.)

(<u>Bemerkung</u>: Auf S. 89 haben wir die Methode der Substitution gesehen. Für 1D-Integrale, haben wir gesehen, daß wenn man $\int f(x)\, dx$ machen will, und man ändert zu $s = s(x)$, dann $dx = \left(\frac{dx}{ds}\right) ds$. Wir verstehen nun, dass $\frac{dx}{ds}$ ist nicht mehr als die "Jacobi-Determinante" in 1D!)

---

* <u>Integration in Kugelkoordinaten</u>

. Wir wollen nun ein 3D-Integral in Kugelkoordinaten schreiben.

Aus S. 62 wissen wir, daß

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \rightarrow \begin{cases} \partial_r x = \sin\theta \cos\varphi \\ \partial_\theta x = r \cos\theta \cos\varphi \\ \partial_\varphi x = -r \sin\theta \sin\varphi \end{cases}$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi \rightarrow \begin{cases} \partial_r y = \sin\theta \sin\varphi \\ \partial_\theta y = r \cos\theta \sin\varphi \\ \partial_\varphi y = r \sin\theta \cos\varphi \end{cases}$$

$$z = r \cos\theta \rightarrow \begin{cases} \partial_r z = \cos\theta \\ \partial_\theta z = -r \sin\theta \\ \partial_\varphi z = 0 \end{cases}$$

Also

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{siehe S. 87'}}{=}$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\left[r^2\sin^2\theta\cos\varphi\right] - r\cos\theta\cos\varphi\left[-r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right]$$

$$- r\sin\theta\sin\varphi\left[-r\sin^2\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi\right]$$

$$= r^2\left\{\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\right\}$$

$$= r^2\sin\theta\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right]\left[\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right] = r^2\sin\theta$$

Also $dx\,dy\,dz = r^2 dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$$\boxed{\int dx\int dy\int dz\; f(x,y,z) = \int dr\, r^2 \int d\theta\,\sin\theta \int d\varphi\; f(r,\theta,\varphi)}$$

(<u>Bemerkung</u>: Die <u>Integration in Zylinderkoordinaten</u> sollte schon klar sein da Zylinderkoordinaten einfach Polarkoordinaten (ρ,φ) plus z-Koordinate sind. Also

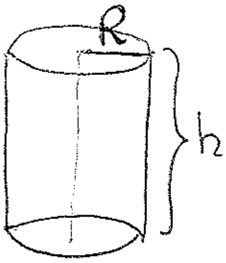
$$dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

$$\boxed{\int dx\int dy\int dz\; f(x,y,z) = \int \rho\, d\rho \int d\varphi \int dz\; f(\rho,\varphi,z)}$$

)

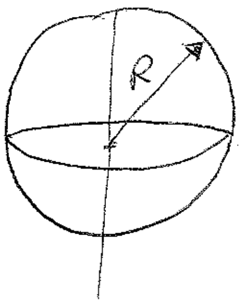
* BEISPIELE

Volumen eines Zylinders



$$V = \underbrace{\int_0^R \rho\, d\rho}_{R^2/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^h dz}_{h} = \pi R^2 h$$

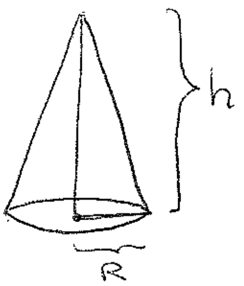
* Volumen einer Kugel



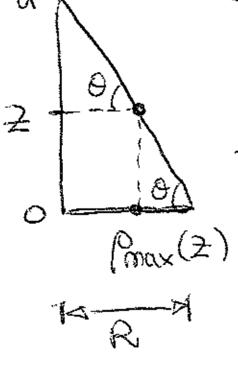
$$V = \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^R = \frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = 2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{\to 2\pi}$$

Also $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

* Volumen eines Kegels



- Das ist nun ein bisschen trickier. Wir verwenden am besten Zylinderkoordinaten, weil das Problem eine Zylindersymmetrie aufweist (d.h. das Problem ist φ-Unabhängig, wobei φ die Polarkoordinate ist).
- Nun müssen wir mit den Integrationsgrenzen aufpassen.



Für eine gewisse Höhe z, ρ kann alle Werte zwischen 0 und $\rho_{max}(z)$ annehmen, wobei

$$\tan\theta = \frac{h}{R} = \frac{h-z}{\rho_{max}(z)} \Rightarrow \rho_{max}(z) = \frac{R(h-z)}{h}$$

· Also
$$V = \int_0^h dz \int_0^{\rho_{max}(z)} d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Aufpassen! ⟹ Nun ist die Ordnung der Integration wichtig, weil nun hängt die Integrationsgrenze von ρ von z ab.

$$\int_0^{\rho_{max}(z)} d\rho\, \rho = \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_0^{\rho_{max}(z)} = \frac{1}{2}\rho_{max}(z)^2 = \frac{R^2}{2h^2}(h-z)^2$$

$$= \frac{R^2}{2h^2}(h^2 - 2hz + z^2)$$

$$\int_0^h dz\, \frac{R^2}{2h^2}(h^2-2hz+z^2) = \frac{R^2}{2}\int_0^h dz - \frac{R^2}{h}\int_0^h dz\, z + \frac{R^2}{2h^2}\int_0^h dz\, z^2$$

$$= \frac{R^2}{2}h - \frac{R^2}{h}\left(\frac{z^2}{2}\right)_0^h + \frac{R^2}{2h^2}\left(\frac{z^3}{3}\right)_0^h$$

$$= \frac{R^2h}{2} - \frac{R^2h}{2} + \frac{R^2h}{6}$$

Dann $V = \frac{R^2h}{6}\cdot 2\pi \longrightarrow \boxed{V = \frac{\pi R^2 h}{3}}$

* Von diesem Beispiel haben wir gelernt daß
  * Die Integrationsgrenzen einer Variablen können von anderen Variablen abhängen.
  * Wenn das passiert, dann ~~ist~~ die Ordnung der Integration natürlich sehr wichtig!