• KOMPLEXE ZAHLEN

* Bisher haben wir nur über reellen Zahlen diskutiert. Nun werden wir die Komplexe Zahlen einführen.

* Sei die Gleichung

$$X^2+1=0 \longrightarrow X^2=-1$$

Wenn X reell wäre ($X \in \mathbb{R}$), dann hätte diese Gleichung keine Lösung.

Wir führen also die Idee von imaginärer Einheit

$$i \equiv \sqrt{-1}$$

also $i \cdot i = -1$, und dann haben wir eine Lösung der Gleichung.

- Komplexe Zahlen sind linear Kombinationen von 1 und i:

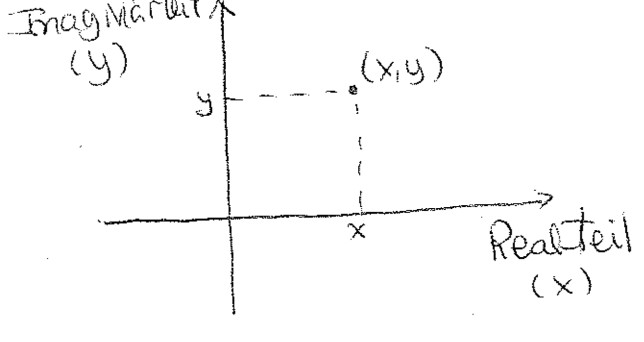
$$z = x + iy \qquad \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: man schreibt $z \in \mathbb{C}$, also z ist eine komplexe Zahl)

- Eine komplexe Zahl ist also ein geordneter Paar von 2 reellen Variablen:

$$z = x + iy \equiv (x, y), \text{ wobei } \begin{array}{l} x = \mathrm{Re}(z) \longrightarrow \underline{\text{Realteil}} \\ y = \mathrm{Im}(z) \longrightarrow \underline{\text{Imaginärteil}} \end{array}$$

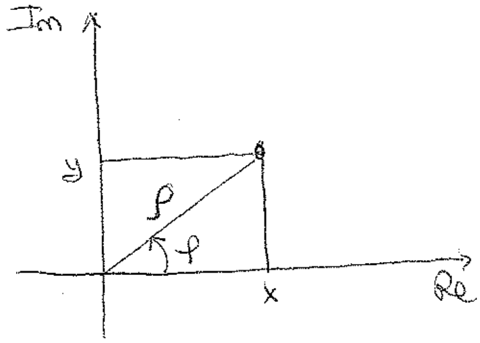
Eine komplexe Zahl ist also ähnlich wie ein Vektor in 2D, und eigentlich wir können immer eine komplexe Zahl auf einer 2D Ebene (die sogen. komplexe Ebene oder Argand-Ebene) darstellen.



x-Achse ⟶ Realteil

y-Achse ⟶ Imaginärteil

* Genau wie für 2D-Vektoren können wir nun Polarkoordinaten auf der komplexen Ebene anwenden



$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \rho \equiv \text{Betrag von } z = x+iy \\ \varphi \equiv \text{Argument von } z \end{array}$$

Man schreibt: $\rho \equiv |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi \equiv \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Dies ist die sogen. Polardarstellung einer komplexen Zahl

Also

$$z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(Bemerkung: später in der Vorlesung von Taylorreihen werden wir sehen, daß $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (Euler-Formel))

* Beide Darstellungen $z \equiv (x,y) \equiv (\rho,\varphi)$ werden angewendet.

* OPERATIONEN MIT KOMPLEXEN ZAHLEN

* Addition: $\boxed{(x_1+iy_1) + (x_2+iy_2) = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)}$

also $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

wie die Vektoraddition (S. 2)

* Multiplikation: $\boxed{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$

Das ist ganz einfach zu beweisen:

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)(x_2+iy_2) &= x_1x_2 + (iy_1)(iy_2) + x_1(iy_2) + (iy_1)x_2 \\ &= x_1x_2 + (i\cdot i)y_1y_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

* Multiplikation (Polardarstellung):

$$\left[\rho_1 [\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1]\right] \cdot \left[\rho_2 [\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)\right]$$

$$= \rho_1 \rho_2 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)\right]$$

$$= \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

Also $\quad z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2| \left[\cos[\arg(z_1) + \arg(z_2)] + i \sin[\arg(z_1) + \arg(z_2)]\right]$

und damit
$$\boxed{\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1|\,|z_2| \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{aligned}}$$

* Negatives: $\boxed{-(x+iy) = -x - iy}$

Es gibt auch ein Null $z = 0 \longrightarrow x = y = 0$

* Inverses: $\dfrac{1}{(x+iy)} = \dfrac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{(x-iy)}{x^2+y^2}$

Also $\boxed{\dfrac{1}{x+iy} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + i \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)} \longrightarrow \boxed{\text{Wichtiges: } \dfrac{1}{i} = -i}$

* Konjugation:

Sei $z = x+iy$. Man definiert der Komplex-Konjugiert von z

als $\boxed{z^* = x - iy}$ (Bemerkung: man schreibt auch $\bar{z}$)

Damit: $z + z^* = 2x \longrightarrow \boxed{\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)}$

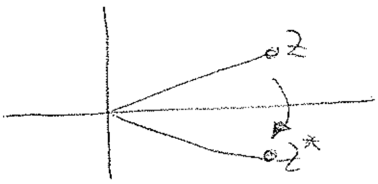
$z - z^* = 2iy \longrightarrow \boxed{\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)}$

Natürlich, eine Zahl ist reell wenn $z = z^*$

* Man sieht auch, daß

$$z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$$

- Auf der komplexen Ebene hat die Konjugation eine einfache geometrische Bedeutung



← Spiegelung um die x-Achse

Andere Eigenschaften der Konjugation:

- $(z^*)^* = z$
- $(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* z_2^*$

---

* KOMPLEXE VEKTOREN UND MATRIZEN

- Nun haben wir die Idee von komplexen Zahlen eingeführt. Wir können nun auch komplexe Vektoren und Matrizen einführen.
- Eine komplexer Vektor $\vec{v}$ hat komplexen Komponenten

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N) \quad \text{wobei} \quad v_j \in \mathbb{C} \quad j = 1 \ldots N$$

Alle Operationen mit komplexen Vektoren sind ähnlich wie für reellen Vektoren. Nur die Idee von Betrag ist etwa anders:

$$|\vec{v}| = \sum_{i=1}^{N} v_i^* v_i = \sum_{i=1}^{N} |v_i|^2 = \vec{v}^* \vec{v}$$

Die Idee von Skalarprodukt ist ähnlich, aber nun

Skalarprodukt ⇒ $(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^* \cdot \vec{v}$

und damit $|\vec{u}|^2 = (\vec{u}, \vec{u})$

// 2 Vektoren sind orthogonalen wenn $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

* Die Idee von Komplexen Matrizen ist auch sehr einfach
Eine komplexe Matrix A ist ein Array von komplexen Zahlen

$a_{ij} \in \mathbb{C}$

Die Addition und Multiplikation von Matrizen ist genauso wie für reellen ~~Matrizen~~ (Seiten 119 und 120) aber nun müssen wir die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen (S. 144 u. 145) anwenden.

Die Konjugation einer Matrix ist auch sehr einfach

Sei A eine Matrix mit Element a_{ij}

Dann A^* hat Elementen a_{ij}^*

Assoziiert mit der Idee von Konjugation haben wir die Idee von Adjungierte ~~r~~ Matrix $\boxed{A^\dagger = (A^*)^T}$ (Bemerkung: † ist wie ein Dolch. Auf Englisch "dagger").

also einfach komplex-konjugiert und transponiert

d.h. $(A^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*$

z.B. $$\begin{pmatrix} 1-3i & 4+i \\ 4-i & 2+i \end{pmatrix}^\dagger = \left[\begin{pmatrix} 1-3i & 4+i \\ 4-i & 2+i \end{pmatrix}^*\right]^T = \begin{pmatrix} 1+3i & 4-i \\ 4+i & 2-i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1+3i & 4+i \\ 4-i & 2-i \end{pmatrix}$$

* Eine Matrix ist Unitär wenn

$$\boxed{A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A = \mathbb{1}} \longrightarrow \text{also } \boxed{A^\dagger = A^{-1}}$$

Das ist die Verallgemeinerung der Idee der orthogonalen Matrizen (S. 133).

*) Bemerkung: Auf S. 141' haben wir gesehen, daß den Skalarprodukt 2 Vektoren als ein Matrixprodukt $\vec{u}^T \cdot \vec{v}$ verstanden werden kann. Für komplexe Zahlen: $(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^\dagger \cdot \vec{v}$.

* Eine Matrix ist Hermitesch (oder selbstadjungiert) wenn

$$\boxed{A = A^{\dagger}}$$

also $a_{ij} = a_{ji}^*$. Das ist also der komplexen Verallgemeinerung der Idee der symmetrischen Matrizen (S. 137).

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}$ ist Hermitesch

* Die Hermitesche Matrizen erfüllen eine sehr wichtige Eigenschaft
  * Die Eigenwerte sind reell
  * Die Eigenvektoren sind miteinander orthogonal

Das ist die Verallgemeinerung unserer Diskussion auf S. 137.
(Symmetrische reelle Matrizen sind ein besonderer Fall von Hermiteschen Matrizen)

- Damit sind wir im Moment fertig mit unserer Diskussion der komplexen Zahlen. Komplexe Zahlen spielen eine extrem wichtige Rolle in der Mathematik und in der theoretischen Physik, und von nun an werden wir die sehr oft treffen.