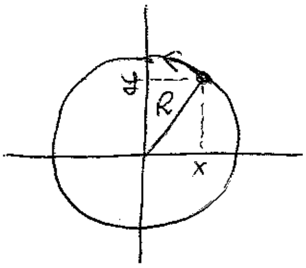
• Krummlinige Koordinaten

• Bisher haben wir nur Kartesische Koordinaten (x,y,z) benützt. Diese Koordinaten sind zwar nützlich, sind die aber nicht immer der beste Auswahl, wenn wir ein System oder ein Problem beschreiben oder lösen wollen.

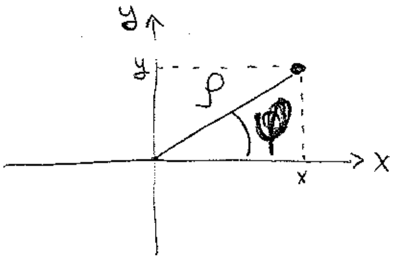
· Zum Beispiel, auf S. 11 haben wir die Kreisbewegung studiert. Wir können diese Bewegung in Kartesischen Koordinaten beschreiben:



$$x = R\cos\omega t$$
$$y = R\sin\omega t$$

· Es gibt aber bessere Koordinaten, die sogen. Polarkoordinaten (ρ,φ)

Diese Koordinaten sind mit der Kartesischen Koordinaten verknüpft:



$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}}$$

Also
$$\boxed{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}}$$

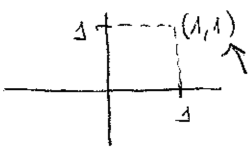
: Nun ist die Beschreibung der Kreisbewegung sehr einfach:

$$\rho = R \Rightarrow \text{konstant}$$

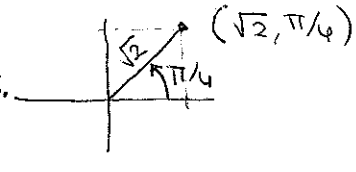
$$\varphi(t) = \omega t$$

· Also, ein Punkt auf einer Ebene läßt sich in Kartesischen Koordinaten aber auch in Polarkoordinaten darstellen.

z.B.:

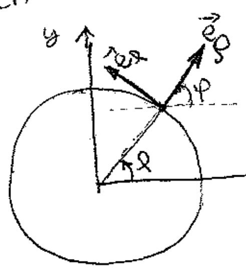


KARTES.
(x,y)



POLAR
(ρ,φ)

*Auf S. ② haben wir die Einheitsvektoren $\vec{e}_{x,y}$ eingeführt. Diese Vektoren sind mit den x,y-Richtungen assoziiert. Genauso können wir mit ρ und φ zwei Einheitsvektoren assoziieren.



* Für einen Winkel φ definiert man:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec e_\rho &= \cos\varphi\,\vec e_x + \sin\varphi\,\vec e_y\\ \vec e_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec e_x + \cos\varphi\,\vec e_y\end{aligned}} \Rightarrow \underline{\text{Einheitsvektoren der Polarkoordinaten}}$$

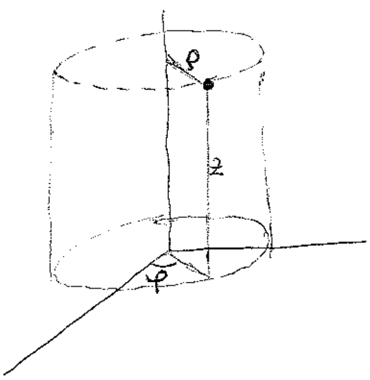
- Wie es sein soll $\vec e_\rho \cdot \vec e_\varphi = 0$, d.h. die sind zueinander orthogonal.

• Das hier ist ein Beispiel einer Drehung. Wir werden viel mehr über Drehung von Koordinaten später in dieser Vorlesung sehen

Ausserdem $\vec e_\rho \times \vec e_\varphi = \vec e_z$.

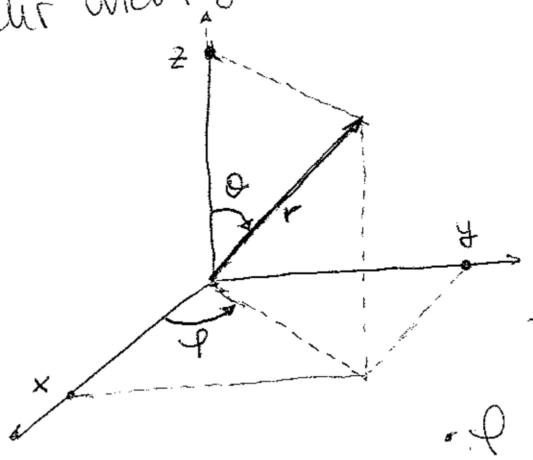
(Bemerkung: die z-Richtung geht aus dem Blatt nach oben)

- Die Koordinaten (ρ, φ, z) sind die sogen. Zylinderkoordinaten



- Also die sind einfach die Polarkoordinaten auf der XY-Ebene plus die z-Koordinate.
- Die entsprechenden Einheitsvektoren sind $\vec e_\rho, \vec e_\varphi$ und $\vec e_z$.
- Diese Koordinaten sind besonders nützlich für Probleme mit zylindrischer Symmetrie (d.h. φ-unabhängige Probleme).

- Also ein Punkt im Raum kann in Kartesische-Koordinaten (x,y,z) und Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) dargestellt. Es gibt noch eine sehr wichtige Darstellung im Raum, nämlich die Kugelkoordinaten.



- Sei $\vec r = (x,y,z)$ in kartesischen Koordinaten.
- Dann $r = |\vec r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist die sogen. radiale Koordinate oder einfach Radius.
- θ ist der sogen. Polarwinkel. Aus einfacher Trigonometrie: $z = r\cos\theta$ $\quad (0 \le \theta \le \pi)$
- φ ist der sogen. Azimutwinkel. Es ist einfach zu sehen, daß:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$(0 \le \varphi \le 2\pi)$

* Also die Beziehung zwischen Kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten ist:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

(Bemerkung: es ist einfach zu sehen, daß $x^2+y^2+z^2=r^2$, wie es sein sollte)

* Da $\left.\begin{aligned} z &= r\cos\theta \\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\}$ $\theta = \arccos\left[\frac{z}{r}\right] = \arccos\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$

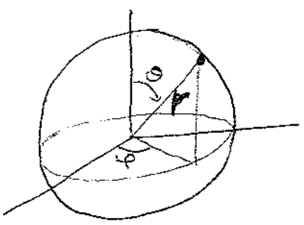
* Da $\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ $\frac{y}{x} = \tan\varphi \longrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

* Zusammengefaßt:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(y/x\right) \end{aligned}}$$

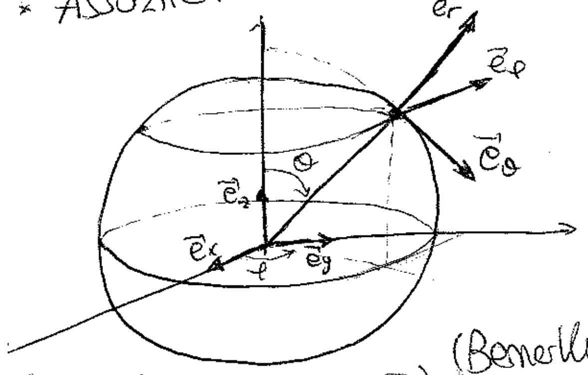
$\Leftarrow$ Beziehung zwischen Kugelkoordinaten und Kartesischen Koordinaten.

* Es ist ziemlich einfach zu verstehen, warum die Kugelkoordinaten so heißen:
  * $r \longrightarrow$ Radius der Kugel
  * $\theta \longrightarrow$ $\pi/2 - \theta$ spielt die Rolle der geographischen Breite
  * $\varphi \longrightarrow$ spielt die Rolle der geographischen Länge



* Kugelkoordinaten sind besonders nützlich für kugelsymmetrische Problem (z.B ungefähr die Problemen, d.h. (φ und θ) - unabhängigen Erdoberfläche).

* Assoziiert mit den Kugelkoordinaten können wir die entsprechenden Einheitsvektoren einführen:



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{aligned}}$$

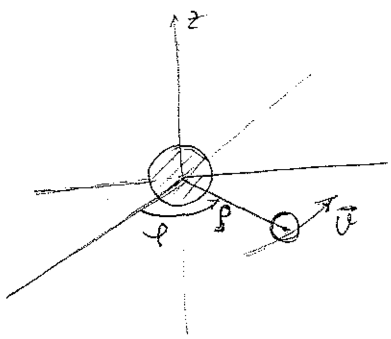
(Bemerkung: die werden so ausgewählt, daß $\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$) (überprüf es!)

($\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$, sieh S. 34)

* BEISPIELE

· Zylinderkoordinaten

* Wir betrachten die Bewegung der Erde um der Sonne.



* Die Geschwindigkeit $\vec v$ liegt auf der XY-Ebene und sie ist immer senkrecht zu $\vec e_\rho$. Also $\vec v = v\,\vec e_\varphi$

Radialvektor auf der XY-Ebene.

(Bemerkung: ich erinnere euch, daß die Bewegung der Erde um der Sonne findet auf einer Ebene statt).

* Dann $\vec L = m\vec r \times \vec v = m(R\,\vec e_\rho)\times(v\,\vec e_\varphi) = mRv(\vec e_\rho \times \vec e_\varphi)$

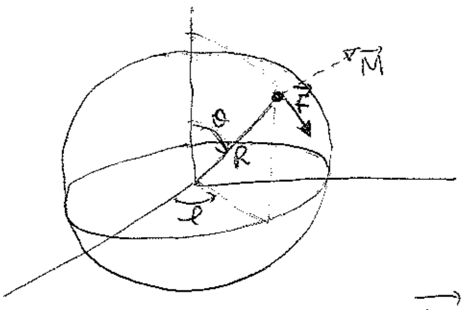
$$\boxed{\vec L = mvR\,\vec e_z}$$

· Kugelkoordinaten

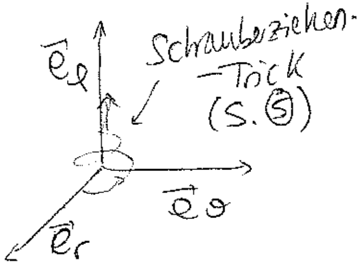
* Ein Teilchen befindet sich auf eine Kugelfläche (mit Radius R)

· Eine Kraft $\vec F = F\,\vec e_\theta$ wird geübt.

· Wir sind an dem Drehmoment $\vec M = \vec r \times \vec F$ interessiert:



$$\vec M = \vec r \times \vec F = (r\,\vec e_r)\times(F\,\vec e_\theta) = rF(\vec e_r \times \vec e_\theta)$$



$$\longrightarrow\ = rF\,\vec e_\varphi$$

(Bemerkung: aus dem Schraubenziehertrick sehen wir, dass $\vec e_r \times \vec e_\theta = \vec e_\varphi$, $\vec e_\theta \times \vec e_\varphi = \vec e_r$, $\vec e_\varphi \times \vec e_r = \vec e_\theta$)

* Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten

* Auf S. 13 haben wir die Definition von Gradient einer Skalarfunktion eingeführt:

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} f + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} f + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

* Wenn wir Zylinderkoordinaten benutzen, dann müssen wir $\vec{\nabla} f$ als Funktion von (ρ, φ, z) aber auch von $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_z$ ausdrücken.

* Wir werden nun sehen wie das geht.

Erstmals $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{array}$

Also: $$\frac{\partial}{\partial x} f \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \rho} f + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

Nun: $$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\varphi}{\rho}$$

(Bemerkung: die Ableitung $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$)

Also: $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} f = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} f - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} f}$$

* genauso: $$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} f + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} f}$$

* Nun müssen wir $\vec{e}_{x,y}$ als Funktion von $\vec{e}_{\rho,\varphi}$ ausdrücken.

Wir wissen schon, daß

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \end{array}}$$

(überprüf es!)

* Also

$$\vec e_x \frac{\partial}{\partial x} f + \vec e_y \frac{\partial}{\partial y} f = \left[\cos\varphi\, \vec e_\rho - \sin\varphi\, \vec e_\varphi\right]\left[\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]$$

$$+ \left[\sin\varphi\, \vec e_\rho + \cos\varphi\, \vec e_\varphi\right]\left[\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right]$$

$$= \left\{\cos^2\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \sin^2\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} + \cancel{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right\} \vec e_\rho$$

$$+ \left\{-\cancel{\sin\varphi\cos\varphi} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \cancel{\sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho}} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right\} \vec e_\varphi$$

$$= \vec e_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \vec e_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

* Damit ist der Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\boxed{\vec\nabla f = \vec e_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \vec e_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \vec e_z \frac{\partial}{\partial z} f}$$

* Der Nabla-Operator ist also

$$\boxed{\vec\nabla = \vec e_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec e_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec e_z \frac{\partial}{\partial z}}$$

* Ähnlicherweise können wir die Divergenz eines Vektors in Zylinderkoordinaten schreiben.

Sei $\vec V = V_x \vec e_x + V_y \vec e_y + V_z \vec e_z$

$$= V_x\left[\cos\varphi\, \vec e_\rho - \sin\varphi\, \vec e_\varphi\right] + V_y\left[\sin\varphi\, \vec e_\rho + \cos\varphi\, \vec e_\varphi\right] + V_z \vec e_z$$

$$= \left\{V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi\right\} \vec e_\rho + \left\{-V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi\right\} \vec e_\varphi + V_z \vec e_z$$

$$= V_\rho \vec e_\rho + V_\varphi \vec e_\varphi + V_z \vec e_z$$

* Also die Komponenten des Vektors in $\vec{e}_{\rho,\varphi,z}$ sind

$$V_\rho = V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi$$
$$V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi$$

und V_z.

* Wir können nun $V_{x,y}$ als Funktion von $V_{\rho,\varphi}$!

$$V_x = V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi$$
$$V_y = V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi$$

* Auf S. 16 haben wir die Divergenz eines Vektors so definiert

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z$$

Nun:

$$\frac{\partial}{\partial x} V_x = \left[\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left[V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi\right]$$

$$= \cos^2\varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} - \sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho} V_\rho$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} V_\varphi .$$

Ebenfalls:

$$\frac{\partial}{\partial y} V_y = \left[\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left[V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi\right]$$

$$= \sin^2\varphi \frac{\partial V_\rho}{\partial\rho} + \sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial\rho} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho} V_\rho$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} V_\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} V_\varphi$$

Also $\partial_x V_x + \partial_y V_y = \frac{\partial}{\partial\rho} V_\rho + \frac{1}{\rho} V_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} V_\varphi$

Also

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} V_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} V_z}$$

Divergenz in Zylinderkoordinaten

* Ähnlicherweise können wir den Laplace-Operator und die Rotation eines Vektors in Zylinderkoordinaten schreiben (Ich lasse es für euch als Übung!)

• $$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

• $$\vec\nabla\times\vec V = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec e_\rho & \rho\vec e_\varphi & \vec e_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec e_\rho\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right] + \vec e_\varphi\left\{\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right\} + \vec e_z\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho V_\varphi] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right\}$$

---

* Nabla-Operator in Kugelkoordinaten
* Wenn wir Kugelkoordinaten anwenden, dann müssen wir $\vec\nabla f$ als Funktion von (r,θ,φ) aber auch von $\vec e_r, \vec e_\theta$ und $\vec e_\varphi$ schreiben.
* Die Rechnung ist ähnlich wie die für Zylinderkoordinaten (ich lasse sie euch als Übung!):

$$\boxed{\vec\nabla f = \vec e_r\frac{\partial f}{\partial r} + \vec e_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \vec e_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}}$$ → Gradient in Kugelkoordinaten

* Die Divergenz sieht so aus

$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec V = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, V_\theta) + r\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right\}}$$

* Der Laplace-Operator:

$$\boxed{\nabla^2 f = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right\}}$$

* Und die Rotation:

$$\vec\nabla\times\vec V = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec e_r & r\vec e_\theta & r\sin\theta\,\vec e_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ V_r & rV_\theta & r\sin\theta\, V_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\begin{array}{l} \vec e_r\left[r\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta\, V_\varphi] - r\frac{\partial}{\partial\varphi}V_\theta\right] \\ + r\vec e_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}V_r - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right] \\ + r\sin\theta\,\vec e_\varphi\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}V_r\right]\end{array}\right\}$$

* Beispiel

· Auf S. 35 haben wir gesehen, daß eine Zentralkraft $\vec{F}$ ist auch dazu konservativ, wenn

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$$

und daß das assoziierte Potential der Form $V(r)$ ist.

· Mit Hilfe der Kugelkoordinaten können wir das sehr einfach beweisen: Wir werden zeigen, daß $-\vec{\nabla}V(r)$ ist der Form $f(r)\,\vec{e}_r$.

$$-\vec{\nabla}V(r) = -\left\{\vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right\} \overset{\text{aber } V=V(r)\text{ d.h. }\theta\text{ und }\varphi\text{ unabhängig}}{=}$$

$$= \left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)\vec{e}_r = f(r)\,\vec{e}_r$$

(Bemerkung: die Rechnung mit kartesischen Koordinaten wäre viel viel länger gewesen. Moral: wenn man das Koordinatensystem richtig auswählt, kann man sich viel Zeit und Aufwand sparen!)

* Noch ein Beispiel.

Wir haben auf S. 24 gesehen, daß die Coulomb-Kraft zwischen 2 Ladungen der Form:

$$\vec{F} = k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

Wie ist die Divergenz $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$? Gucken wir:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,F_\theta) + r\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right\} \overset{\text{aber } F_\theta=F_\varphi=0 \text{ und } F_r=F_r(r)}{=}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2F_r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big\{\underbrace{kq_1q_2}_{\text{konstant}}\Big\} = 0$$

· Also die Divergenz der Coulombkraft (auch der Schwerkraft) ist Null

(Bemerkung: in RdP II werden wir sehen, dass $\vec{F} = q_1\left(\frac{kq_2}{r^2}\vec{e}_r\right) = q_1\vec{E}$ wobei $\vec{E}$ das sogen. Elektrisches Feld auf 1 ist. Es ist einfach zu sehen, daß $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \longrightarrow$ der Punkt $r=0$, wo die Ladung q_1 sitzt, ist speziell (wir werden das in RdP II sehen))

* Wir sind damit mit unserer Diskussion der krummlinigen Koordinaten (vorläufig) am Ende.

Die krummlinigen Koordinaten spielen eine sehr wichtige Rolle in der Beschreibung physikalischer Systeme. Wie schon erwähnt, der Auswahl der richtigen Koordinaten kann die Rechnungen (und das Verständnis) extrem vereinfachen.

* Wir werden die krummlinigen Koordinaten sehr oft in dieser Vorlesungsreihe treffen.