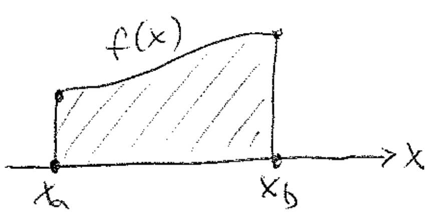
• KURVENINTEGRALE

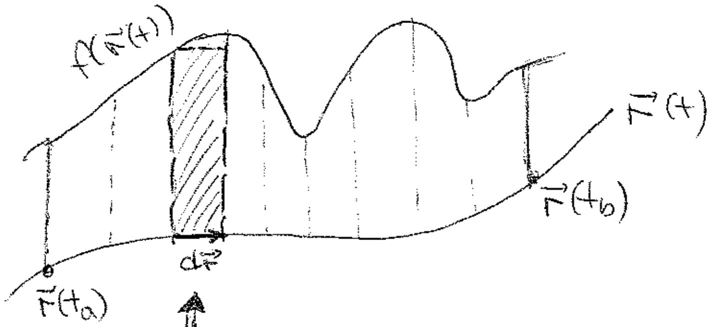
* Wenn wir die 1D-Integralen diskutiert haben, haben wir die Integralen entlang der X-Achse gemacht

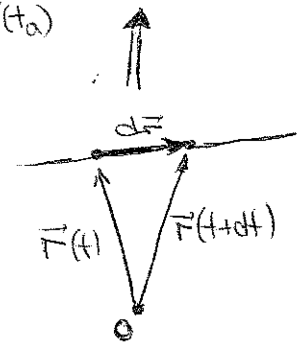


$$\longrightarrow \quad \int_{x_a}^{x_b} dx\, f(x)$$

* Mehrmals wollen wir aber unser Integral nicht entlang einer festen Achse (z.B. die X-Achse) sondern entlang einer Kurve $\vec{r}(t)$

Bemerkung: t kann die Zeit sein, aber auch irgendandere Parameter, der die Kurve parametrisiert)





• Also $d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt$

$|d\vec{r}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = dl \Leftarrow$ Kurvenelement (spielt nun die Rolle von dx)

Das Kurvenintegral der Funktion $f(\vec{r})$ entlang der Kurve $\vec{r}(t)$

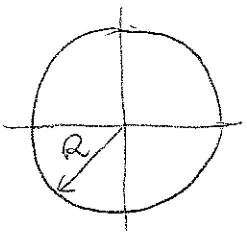
ist also

$$\boxed{\int_C dl\, f(\vec{r}) = \int_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| f(\vec{r}(t))}$$

Kurvenintegral

C ist die Kurve $\vec{r}(t)$ zwischen $\vec{r}(t_a)$ und $\vec{r}(t_b)$

* <u>Beispiel</u>: <u>Kreisumfang</u>



. Die Kurve C ist nun ein Kreis mit Radius R.
Wir können den Kreis so parametrisieren:

$$\vec{r}(\phi) = R(\cos\phi, \sin\phi)$$ (die z-Richtung ist Null, also ich vergesse sie)

. Also $\left|\frac{d\vec{r}}{d\phi}\right| = \left|R(-\sin\phi, \cos\phi)\right| = R$

$\int_C dl \Rightarrow$ Umfang des Kreises

$\parallel$

$\int_0^{2\pi} d\phi\, R = 2\pi R$

---

* Es gibt mehrere andere Sorten Kurvenintegrale, z.B.

- $\boxed{\int_C \varphi(\vec{r})\, d\vec{r}}$ wobei $d\vec{r} \equiv \vec{e}_x\, dx + \vec{e}_y\, dy + \vec{e}_z\, dz$

(also $d\vec{r}$ heißt eine kleine Verschiebung entlang jeder Richtung)

$\varphi(\vec{r})$ ist eine skalare Funktion.
Dann ist $\int_C \varphi(\vec{r}) d\vec{r}$ <u>ein Vektor</u> der Form:

$$\int_C \varphi(x,y,z)\, d\vec{r} = \vec{e}_x \int_C dx\, \varphi + \vec{e}_y \int_C dy\, \varphi + \vec{e}_z \int_C dz\, \varphi$$

wobei $\int_C dx\, \varphi(x,y,z) = \int_{t_a}^{t_b} \varphi\left[x(t), y(t), z(t)\right] \frac{dx}{dt}\, dt$

und genauso für $\int_C dy\, \varphi$ und $\int_C dz\, \varphi$.

. <u>z.B.</u> sei die Kurve $C \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ $\begin{cases} x = \cos\phi \rightarrow \frac{dx}{d\phi} = -\sin\phi \\ y = \sin\phi \rightarrow \frac{dy}{d\phi} = \cos\phi \end{cases}$

sei die Funktion $\varphi(x,y) = x$. Dann

$$\int_C \varphi(x,y)\, d\vec{r} = \vec{e}_x \int_C \varphi(x,y)\, dx + \vec{e}_y \int_C \varphi(x,y)\, dy = \vec{e}_x \int_0^{2\pi} d\phi\, (-\sin\phi \cos\phi) + \vec{e}_y \int_0^{2\pi} d\phi\, \cos^2\phi$$

$$= \pi\, \vec{e}_y$$

* Wir können auch <u>Kurvenintegralen von Vektorfelder</u> machen. Am wichtigsten ist vielleicht das Integral:

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} \qquad \text{wobei } \vec{V} = \vec{V}(\vec{r}) \text{ ein Vektorfeld ist.}$$

<u>Bemerkung</u>: auch möglich wären z.B. $\int_C \vec{V} \times d\vec{r}$, oder $\int_C \vec{V}\, dl$.

* Sei $\vec{V}(\vec{r}) = (V_x(\vec{r}), V_y(\vec{r}), V_z(\vec{r}))$

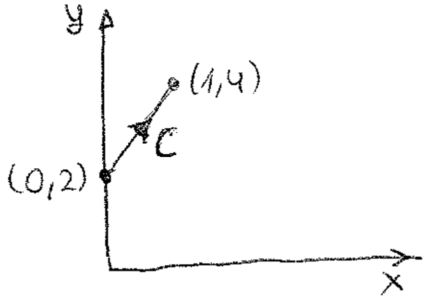
Dann

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_C V_x(\vec{r})\, dx + \int_C V_y(\vec{r})\, dy + \int_C V_z(\vec{r})\, dz$$

$$= \int_C V_x(\vec{r}(t)) \frac{dx}{dt} dt + \int_C V_y(\vec{r}, t) \frac{dy}{dt} dt + \int_C V_z(\vec{r}(t)) \frac{dz}{dt} dt$$

* <u>Beispiel</u>:

* Sei $\vec{V}(x,y) = \vec{e}_x\, yx^2 + \vec{e}_y \sin \pi y$
* Wir wollen das Kurvenintegral entlang der Kurve



Diese Kurve ist ein Segment von (0,2) bis nach (1,4):

$$\vec{r}(t) = (0,2) + [(1,4) - (0,2)]t$$

$$= (t, 2+2t) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Also $x(t) = t \longrightarrow \frac{dx}{dt} = 1$

$y(t) = 2+2t \longrightarrow \frac{dy}{dt} = 2$

Dann

$$\int_C \vec{V}(x,y)\, d\vec{r} = \int_C V_x(x,y)\, dx + \int_C V_y(x,y)\, dy$$

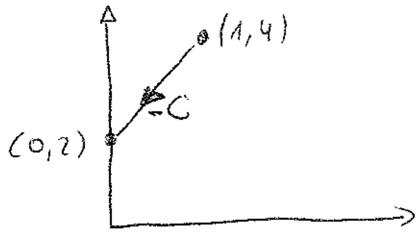
$$= \int_0^1 dt\, y(t)\, x^2(t) \frac{dx}{dt} + \int_0^1 dt \sin \pi y(t) \frac{dy}{dt}$$

$$= \int_0^1 dt\, (2+2t) t^2 + \int_0^1 dt \sin \pi (2+2t)\, 2 = \qquad u = 2+2t,\; du = 2dt$$

$$= 2\int_0^1 dt\, t^2 + 2\int_0^1 dt\, t^3 + \int_2^4 du \sin \pi u = \frac{7}{6}$$

$\sin \pi u \to 0$

* Wir machen nun anders. Wir gehen nun von (1,4) bis nach (0,2)



Also wir folgen nun den Pfad (−C)

$$\int_{-C} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_{-C} dx\, V_x(x,y) + \int_{-C} dy\, V_y(x,y)$$

Der Pfad (−C) ist der Form $\vec{r}(t) = (1-t, 4-2t)$

$0 \le t \le 1$

Also $x(t) = 1-t \rightarrow dx = -dt$

$y(t) = 4-2t \rightarrow dy = -2dt$

Also: $$\int_{-C} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt\, (4-2t)(1-t)^2(-1) + \int_0^1 dt\, \sin\pi(4-2t)\,(-2)$$

$$= -\int_0^1 dt\left[4 - 10t + 8t^2 - 2t^3\right] + \cancel{\int_4^2 du\, \sin\pi u}$$

$$= -\left(4t - 5t^2 + \frac{8}{3}t^3 - \frac{t^4}{2}\right)_0^1 = -\frac{7}{6}$$

Also $$\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{V}\cdot d\vec{r}$$

• Das ist so für alle Kurvenintegralen. <u>Es ist also wichtig in welche Richtung entlang der Kurve wir integrieren.</u>

<u>Bemerkung</u>: das sollte keine Überraschung sein. Für gewöhnlichen Integralen haben wir gesehen (S. 70) daß

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$a \xrightarrow{\quad C \quad} b \qquad\qquad a \xleftarrow{\quad -C \quad} b$$

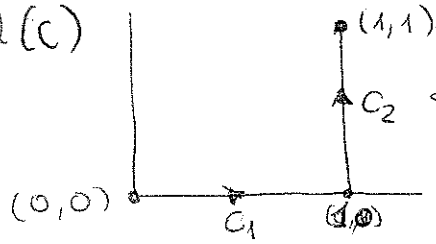
• Diese Eigenschaft ist natürlich sehr <u>wichtig</u>!

* Noch eine wichtige Eigenschaft der ~~Kurven~~ Kurvenintegralen ist daß die Ergebnisse hängen nicht nur von Anfangs- und Endpunkt ab, sondern auch (im allgemeinen) vom Pfad.

Wir werden das im Rahmen eines Beispiels sehen:

* Sei $\vec{V} = -y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y$

Sei der Pfad (C)



C_2: $\vec{r}(t) = (1,0) + t\,\vec{e}_y = (1,t) \quad 0 \le t \le 1$

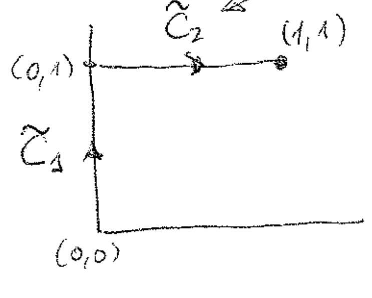
$d\vec{r} = \vec{e}_y\,dt$

C_1: $\vec{r}(t) = \vec{e}_x\,t \longrightarrow d\vec{r} = \vec{e}_x\,dt$

$0 \le t \le 1$

Also $$\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{V}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt\,(\underbrace{-y(t)}_{\substack{0\\ \text{entlang}\\ C_1}}) + \int_0^1 dt\,\underbrace{x(t)}_{\substack{1\\ \text{entlang}\\ C_2}} = 1$$

Sei nun der Pfad $(\tilde{C})$



$\tilde{C}_2$: $\vec{r}(t) = (0,1) + t\,\vec{e}_x = (t,1)$

$d\vec{r} = dt\,\vec{e}_x$

$\tilde{C}_1$: $\vec{r}(t) = t\,\vec{e}_y$

$d\vec{r} = dt\,\vec{e}_y$

Dann $$\int_{\tilde{C}} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{C}_1\,0}^{1} \vec{V}(\vec{r}(t))\cdot\vec{e}_y\,dt + \int_{\tilde{C}_2\,0}^{1} \vec{V}(\vec{r}(t))\cdot\vec{e}_x\,dt$$

$$= \int_0^1 dt\,\underbrace{x(t)}_{\substack{=0\\ \text{entlang}\\ \tilde{C}_1}} + \int_0^1 dt\,(-\underbrace{y(t)}_{\substack{=1\\ \text{entlang}\\ \tilde{C}_2}}) = -1$$

Also $\int_C \vec{\nabla}\cdot d\vec{r} \neq \int_{\tilde{C}} \nabla \cdot d\vec{r}$

· Das ist im allgemeinen so für alle Kurvenintegrale:
„Das Kurvenintegral hängt nicht nur von Anfangs- und Endpunkt ab, sondern auch vom Pfad."

---

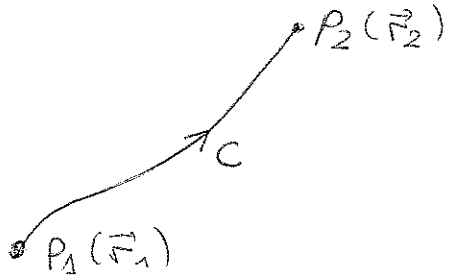
* ARBEIT

· Eine wichtige Anwendung der Kurvenintegralen in der Physik liegt an der Idee von Arbeit.

· Für eine gegebene Kraft $\vec{F}$ und eine infinitesimale Verschiebung $d\vec{r}$, wird die Arbeit

$$\delta W = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

anzuwenden sein.



· Für endliche Wegstrecken definiert man die Arbeit

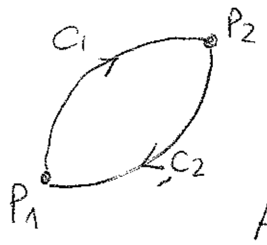
$$W_{21} = -\int_{P_1\,(C)}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

· Die Arbeit hängt also von $\begin{cases} \vec{F} \\ \text{Endpunkte } P_1 \text{ und } P_2 \\ \text{Weg } (C) \end{cases}$

Die Arbeit ist also ein wichtiges Beispiel von Kurvenintegral.

· Wir haben gesagt, dass W im allgemeinen vom Weg C abhängt. Das ist aber nicht immer der Fall. Für konservativen Kräften (S. 29) ist die Arbeit wegunabhängig. Gucken wir das.

• Nehmen wir nun ein geschlossener Weg



(Bemerkung: Wenn der Weg C geschlossen ist, schreibt man denn $\oint_C$)

Also $-\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} =$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ (S. 29) weil $\vec{F}$ konservativ ist

$= \oint_C \vec{\nabla} V\cdot d\vec{r} = \oint_C dV$ S. 15

$= V(\text{END}) - V(\text{ANFANG}) =$ Aber END = ANFANG auf einem geschlossenen Weg!

$= 0$

• Also wenn $\vec{F}$ konservativ ist $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

Das hat eine wichtige Folge.

$$0 = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{S. 109}}{=} \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Also $\boxed{\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$ Die Arbeit ist also wegunabhängig. Es hängt nur von den Endpunkten ab.

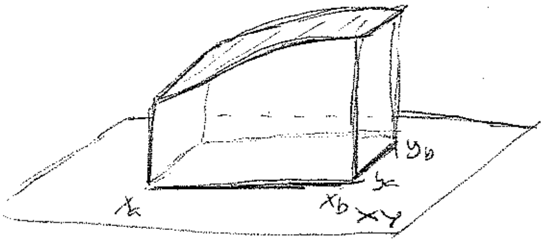
$$W_{P_1,P_2} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} V\cdot d\vec{r} = V(P_2) - V(P_1)$$

Also für eine konservative Kraft

ARBEIT ZWISCHEN 2 PUNKTEN P_1 UND P_2	=	POTENTIALDIFFERENZ ZWISCHEN DEN PUNKTEN
$W(P_1, P_2)$	=	$V(P_2) - V(P_1)$

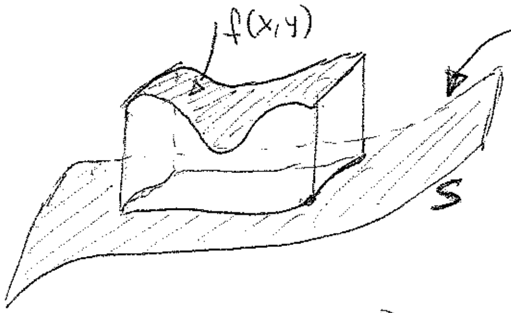
ÜBER FLÄCHENINTEGRALE

* Wenn wir die 2D-Integrale diskutiert haben, haben wir die Integrale auf der XY-Ebene gemacht



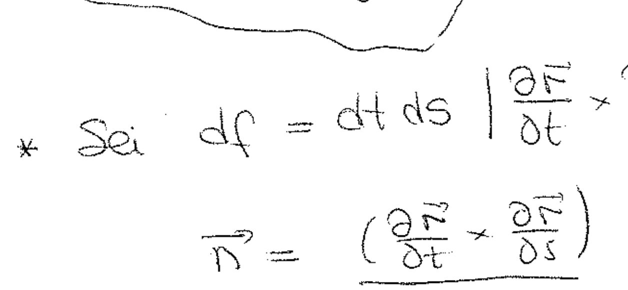
$$\longrightarrow \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a}^{y_b} dy\, f(x,y)$$

* Aber manchmals wollen wir das Integral nicht über einer Ebene, sondern über einer beliebigen Oberfläche (S)



* Wir parametrisieren die Fläche mit 2 Parametern: $\vec{r}(t,s)$

* Wie in unserer Diskussion der Kurvenintegral müssen wir nun ein Flächenelement einführen. Wir machen es genau wie in unserer Diskussion auf S. 88



$$d\vec{f} = d\vec{a} \times d\vec{b} \rightarrow \text{Flächenelement (ein Vektor!)}$$

$$\left.\begin{aligned} d\vec{a} &= dt\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \\ d\vec{b} &= ds\, \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \end{aligned}\right\} \boxed{d\vec{f} = dt\,ds \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right)}$$

* Sei $df = dt\,ds \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right|$

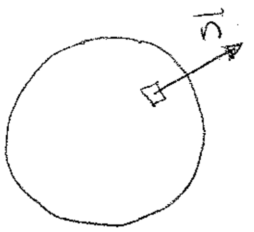
$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right)}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right|} \longrightarrow \underline{\text{Normalvektor}} \text{ an dem Punkt } \vec{r}(t,s)$$

• Für die xy-Ebene, $\vec{n} = \vec{e}_z$, und $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right|$ war die Jacobi-Determinante.

• Also $\boxed{\overrightarrow{df} = df\, \vec{n}}$

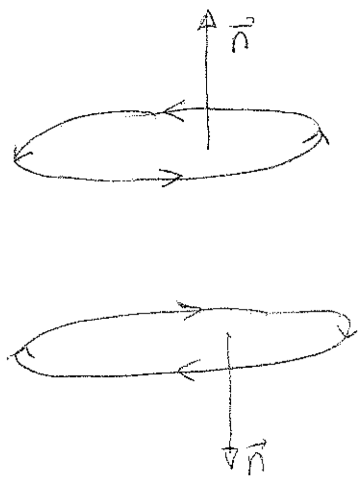
* Für die Wahl der Richtung von $\vec{n}$ folgen wir die folgende Konvention:

* Geschlossene Flächen



* $\vec{n}$ nach außen

* Offene Flächen



· Hier ist es wichtig in welche Richtung um den Rand gehen.

· Man folgt den Schraubenziehertrick (siehe Abbildung)

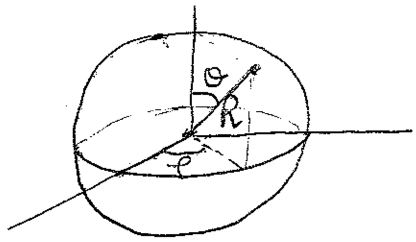
* Wie für Kurvenintegrale es gibt mehreren Arten Oberflächenintegralen.

Wir können z.B.

$$\int_S df \; F(\vec r) = \int dt \int ds \left| \frac{\partial \vec r}{\partial t} \times \frac{\partial \vec r}{\partial s} \right| F[\vec r(t,s)]$$

haben. Sehen wir ein Beispiel:

• Beispiel: Fläche einer Kugel (mit Radius R)



• Erstmal müssen wir die Oberfläche der Kugel parametrisieren. Das ist sehr einfach mit Hilfe der Polar- und Azimutwinkeln (S. 61)

$$\vec r(\theta,\varphi) = R\,[\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta]$$

nun R bleibt fest

$$d\vec f = d\theta\, d\varphi \left[\frac{\partial \vec r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec r}{\partial \varphi} \right]$$

$$\frac{\partial \vec r}{\partial \theta} = R\,[\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta]$$

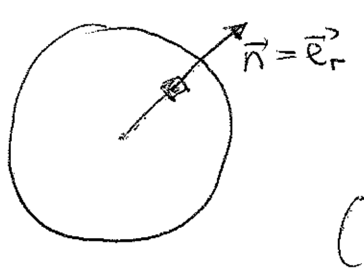
$$\frac{\partial \vec r}{\partial \varphi} = R\,[-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0]$$

$$\frac{\partial \vec r}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec r}{\partial \varphi} \overset{S.6}{=} R^2 \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \overset{S.87}{=} R^2 \left\{ \sin^2\theta\cos\varphi\, \vec e_x + \sin^2\theta\sin\varphi\, \vec e_y + \cos\theta\sin\theta\, \vec e_z \right\}$$

$$= R^2 \sin\theta\, [\sin\theta\cos\varphi\, \vec e_x + \sin\theta\sin\varphi\, \vec e_y + \cos\theta\, \vec e_z]$$

S. 62

$$= R^2 \sin\theta\, \vec e_r$$



Wie erwartet der Normalvektor des Kugels ist $\vec e_r$, also der Einheitsvektor in die Radialrichtung.

(Bemerkung: diese Definition von $\vec n$ folgt die Konvention die wir vorher erwähnt haben)

Also $\quad \vec{df} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \; \vec{e}_r$

$\quad\quad df = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

Damit $\quad \displaystyle\int_S df \, F(\vec{r}) = R^2 \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \;\; F[\vec{r}(\theta, \varphi)]$

Fläche der Kugel

• z.B. wenn $F(\vec{r}) = 1$, dann haben wir einfach die Gesamtfläche der Kugel:

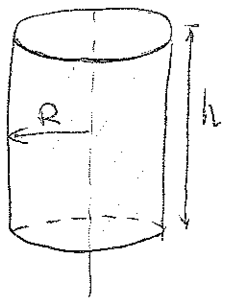
$$F = \int_S df = R^2 \underbrace{\underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{[-\cos\theta]_0^{\pi}}}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \text{Fläche} = 4\pi R^2$$

* Wie für die Kurvenintegralen können wir auch <u>Oberflächenintegralen von Vektorfelder</u> machen. Ein wichtiges Beispiel davon wäre

$$\int_S \vec{df} \cdot \vec{V}(\vec{r}) = \int_S df \; \vec{n} \cdot \vec{V}[\vec{r}(t,s)]$$

$$= \int_S dt\,ds \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right] \cdot \vec{V}\,[\vec{r}(t,s)]$$

* <u>Beispiel</u>: Wir betrachten nun eine Zylinder-Fläche (ohne die End-Kappen)



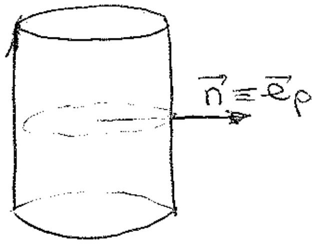
Die Fläche kann mit Hilfe der Polarwinkel φ und z parametrisiert werden:

$$\vec{r}(\varphi, z) = R\cos\varphi \; \vec{e}_x + R\sin\varphi \; \vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R\,(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \overset{\text{S. 61}}{=} R\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

Also $\quad \vec{df} = R\,d\varphi\,dz \; \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z \overset{\text{S. 61}}{=} R\,d\varphi\,dz \; \vec{e}_\rho$



Sei z.B.

$$\vec{F} = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\vec{e}_x + (y\cos\alpha + x\sin\alpha)\vec{e}_y$$

$$= R\,(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)\vec{e}_x + (\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi)\vec{e}_y$$

$$= R\cos\alpha\,[\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y] +$$

$$+ R\sin\alpha\,[-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y] = R(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{e}_\varphi)$$

Dann $\vec{F}\cdot\vec{n} = R\cos\alpha$

Also $$\int_S d\vec{f}\cdot\vec{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz\, R\cdot R\cos\alpha = R^2\cos\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz$$

$$= 2\pi R^2 h\cos\alpha$$

* Andere Beispiele von Flächenintegrale sind z.B.:

$$\int_S d\vec{f}\; F(\vec{r})$$

$$\int_S d\vec{f}\times\vec{F}(\vec{r})$$

Aber die werden genau so gemacht wie die bisherige Beispiele.

Flächenintegrale (und auch Kurvenintegralen) sind besonders wichtig in der Theorie der Elektrischen und magnetischen Feldern, aber das werden wir später in RdP II sehen.