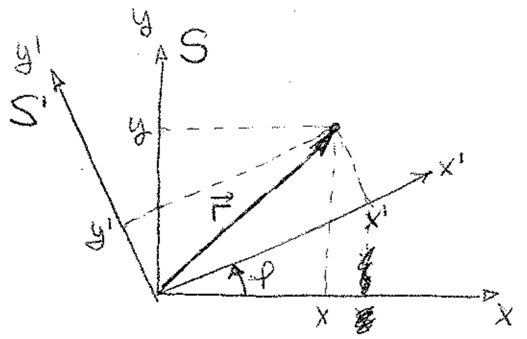
• Matrizen

* Die Matrizen sind sehr wichtig in der Mathematik und in der Physik auch. Ihr habt wahrscheinlich schon etwas über Matrizen gelernt. Hier werden wir manche Begriffen und Eigenschaften auffrischen, und neue Ideen einführen.

• Matrizen findet man überall, z. B:

* Drehungen



• Wir nehmen ein Koordinatensystem $S \equiv (x, y)$

• Wir drehen nun die Achsen ein Winkel φ wie in der Abbildung. Damit bekommen wir ein neues Koordinaten-system $S' \equiv (x', y')$

• Wenn ich ein Vektor $\vec{r} \equiv (x, y)$ habe, wie lauten die neue Koordinaten (x', y') im System S'.

• ganz einfach (aus der Abbildung)

$$x' = (\cos\varphi)\, x + (\sin\varphi)\, y$$

$$y' = (-\sin\varphi)\, x + (\cos\varphi)\, y$$

• Seien $\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = y \end{matrix} \quad \Bigg\| \quad \begin{matrix} x_1' = x' \\ y_1' = y' \end{matrix} \quad \Bigg\| \quad \begin{matrix} a_{11} = \cos\varphi & a_{12} = \sin\varphi \\ a_{21} = -\sin\varphi & a_{22} = \cos\varphi \end{matrix}$

Dann $\left.\begin{matrix} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{matrix}\right\} \quad x_i' = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j$

• Die a_{ij} Koeffizienten bauen eine <u>2×2 Matrix</u>

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix ist im allgemeinen ein Array

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \longrightarrow M \times N \text{ matrix}$$

M Zeilen N Spalten

Wenn $M=N$ spricht man von einer quadratischen Matrix
(hier werden wir besonders $N \times N$ Matrizen studieren)

* Lineare Gleichungssysteme

- Mehrmals treffen wir Gleichungssysteme der Form:

$$2x + 3y = 5$$
$$4x + 8y = 3$$

Die wir in der allgemeinen Form

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

schreiben können. (Da oben: $a_{11}=2,\ a_{12}=3$; $a_{21}=4,\ a_{22}=8$; $x_1 = x$; $x_2 = y$; $b_1 = 5$; $b_2 = 3$)

Die Koeffizienten a_{ij} bauen also auch eine Matrix.
(Die Koeffizienten b_i bauen ein Vektor, genauso wie die Unbekannten x_j)

- In dieser Vorlesung werden wir die wichtigste Eigenschaften der Matrizen, und der Operationen mit Matrizen lernen.

* Erstmal, zwei Matrizen A und B sind gleich

$A = B$

wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i,j.

* Addition

- Seien zwei Matrizen A und B
- Wir definieren $C = A + B$ als noch eine Matrix mit Elementen $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Da die Summe $a_{ij} + b_{ij}$ ist kommutativ, also $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, dann genauso kommutativ ist die Matrixsumme:

$$A + B = B + A$$

- Ebenfalls, wenn wir 3 Matrizen A, B und C haben, dann

$$(A+B) + C = A + (B+C) \longrightarrow \text{Assoziativität}$$

- Die Nullmatrix O hat alle Elementen Null und damit $A + O = A$

* Produkt mal ein Skalar

- Sei α ein Skalar, und A eine Matrix. Dann αA ist noch eine Matrix mit Elementen αa_{ij}
- Ganz klar $\alpha A = A \alpha$

* Produkt mal ein Vektor

- Sei A eine $N \times N$ Matrix und $\vec{v}$ ein N-dimensionaler Vektor. Dann $A\vec{v} = \vec{w}$ ist noch ein Vektor mit Komponenten

$$w_i = \sum_j a_{ij} v_j$$

* Produkt von Matrizen

- Die Multiplikation von Matrizen ist ein bisschen Trickier
- Seien 2 Matrizen A und B

Wir definieren den Produkt

$$C = A \cdot B$$

als noch eine Matrix mit Elementen

$$C_{ij} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}$$

(Bemerkung: wenn A und B $N \times N$ sind, so ist auch C.
In allgemeinen wenn A $N \times M$, und B $M \times N'$ sind, dann
C ist $N \times N'$. Aber A muss immer genauso viele Spalten
wie die Zeilenzahl von B. Aber wie gesagt hier betrachten wir A und B als $N \times N$)

- Das Element C_{ij} kann also als ein Skalarprodukt 2 Vektoren verstanden werden, und zwar

$$C_{ij} = \vec{v}_i \cdot \vec{w}_j \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \vec{v}_i &\equiv \{a_{i1} \dots a_{iN}\} \\ \vec{w}_k &\equiv \{b_{1j} \dots b_{Nj}\} \end{aligned}$$

Also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2N} \\ & \vdots & \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{a_{11} \dots a_{1N}\} \\ \{a_{21} \dots a_{2N}\} \\ \vdots \\ \{a_{N1} \dots a_{NN}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{v}_1) \\ (\vec{v}_2) \\ \vdots \\ (\vec{v}_N) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & & b_{NN} \end{pmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{N1} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{N2} \end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix} b_{1N} \\ b_{2N} \\ \vdots \\ b_{NN} \end{Bmatrix} \right) = \left((\vec{w}_1), (\vec{w}_2), \dots, (\vec{w}_N) \right)$$

Also

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (\vec{v}_1) \\ (\vec{v}_2) \\ \vdots \\ (\vec{v}_N) \end{pmatrix} \cdot \left((\vec{w}_1), (\vec{w}_2), \dots, (\vec{w}_N) \right) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2 & \dots & \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_N \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_2 & \dots & \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_N \\ \vdots & & \ddots & \\ \vec{v}_N \cdot \vec{w}_1 & \vec{v}_N \cdot \vec{w}_2 & \dots & \vec{v}_N \cdot \vec{w}_N \end{pmatrix}$$

* Beispiel

Seien $\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(Bemerkung: Diese sind die sogen. Pauli-Matrizen. Sie spielen eine bedeutende Rolle in der Quantenphysik)

$$\sigma_1 \cdot \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prüfen wir nun:

$$\sigma_3 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (0,-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (0,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3$

Hier haben wir etwas sehr wichtiges: die Matrix-Multiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ, also

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Assoziiert mit der Idee der Nicht-Kommutativität haben wir die Idee vom Kommutator

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$$

Also im allgemeinen $[A, B] \neq 0$

(Bemerkung: die Kommutatoren spielen eine sehr wichtige Rolle in der Quantenmechanik!)

- Also der Produkt $A \cdot B$ ist nicht Kommutativ.

Trotzdem ist er

- Assoziativ: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Distributiv: $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

---

* Identitätsmatrix

- Wir definieren die Identitätsmatrix $\mathbb{1}$ als die Matrix mit Elementen $\mathbb{1}_{ij} = \delta_{ij}$ → Kronecker-Delta (S. 4)
- Es ist einfach zu sehen, daß $A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A = A$

---

* Diagonale Matrizen

- Eine Matrix ist diagonal wenn $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{NN} \end{pmatrix}$$

* Die Identitätsmatrix ist ganz klar ein Beispiel einer diagonalen Matrix
* Man kann eine Matrix so transformieren, daß man die Matrix in einer diagonalen Matrix verwandelt. Das ist die sogen. Matrix verwandelt. Das ist die sogen. Hauptachsentransformation (oder Diagonalisierung der Matrix), die wir später studieren werden.

- Spur einer Matrix

- Sei A eine quadratische $N \times N$ Matrix mit Elementen a_{ij}
- Die Spur der Matrix A ist einfach die Summe der Elementen auf der Diagonal:

$$Sp(A) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}$$

Bemerkung: in englischen Büche wird als $Tr(A)$ geschrieben ($Tr \equiv$ "Trace")

- Die Spur spielt mehrmals in der Physik eine wichtige Rolle.

* Die Spur erfüllt einigen wichtigen Eigenschaften:

  - <u>Linearität</u>: $Sp(A+B) = Sp(A) + Sp(B)$

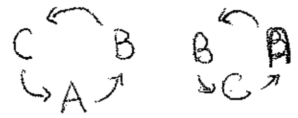
  - $\underline{Sp(A\cdot B) = Sp(B\cdot A)}$ sogar wenn $[A,B] \neq 0$

Das ist einfach zu sehen:

$$Sp(A\cdot B) = \sum_i (A\cdot B)_{ii} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ji} = \sum_j \sum_i B_{ji} A_{ij}$$

$$= \sum_j (B\cdot A)_{jj} = Sp(B\cdot A)$$

  - <u>Zyklische Eigenschaft der Spur</u>:



$$Sp(A\cdot B\cdot C) = Sp(C\cdot A\cdot B) = Sp(B\cdot C\cdot A)$$

(das ist einfach zu beweisen, mach es!)

- <u>Determinante einer Matrix</u>

* Wir haben schon an einem Paar Stellen die Idee von Determinante getroffen (z.B. in der Theorie der mehrdimensionalen Integration, s. 87'). Wir werden nun die Idee von Determinante besser lernen, und ebenfalls einigen wichtigen Eigenschaften.

* Sei A eine $N\times N$ Matrix mit Elementen a_{ij}

Die Determinante von A wird so definiert:

$$\underbrace{\det(A) \equiv |A|}_{\text{beide Schreibweisen sind möglich}} \equiv \sum_{P} \epsilon_P \prod_{i=1}^{N} a_{i,P(i)}$$

wobei P Permutationen der Elementen $\{1,2,\dots,N\}$ sind,

und $\epsilon_P = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \end{cases}$

* Bemerkung
 * Vielleicht ein Zwischenkommentar über Permutationen.
 * Sei die Reihe $1, 2, 3, \ldots, N-1, N$

Man definiert eine Transposition als ein Umtausch von 2 Elementen der Reihe: 1 2 3 4
2 1 3 4

* Eine Permutation ist eine Zusammensetzung von Transpositionen

z.B. $\underbrace{12}34 \longrightarrow 2\underbrace{13}4 \longrightarrow 23\underbrace{14} \longrightarrow 2341$

* Eine Permutation heißt gerade wenn die eine Zusammensetzung einer gerade Zahl von Transpositionen ist.

z.B. $\mathbb{P}(1234) = 2314$ ist gerade, weil:

$1234 \xrightarrow{1} 2134 \xrightarrow{2} 2314 \longrightarrow$ 2 Transpositionen

Wenn die Anzahl von Transpositionen ist ungerade, dann redet man von ungeraden Permutationen

z.B. $\mathbb{P}(1234) = 2341$ ist ungerade, weil

$1234 \xrightarrow{1} 2134 \xrightarrow{2} 2314 \xrightarrow{3} 2341 \longrightarrow$ 3 Transpositionen

---

* Also $\epsilon_{\mathbb{P}} = 1$ für $\mathbb{P}(1234) = 2314$

aber $\epsilon_{\mathbb{P}} = -1$ für $\mathbb{P}(1234) = 2341$

* Außerdem wenn $\mathbb{P}(1234) = 2314$, d.h. $\mathbb{P}(1) = 2$, $\mathbb{P}(2) = 3$, $\mathbb{P}(3) = 1$, $\mathbb{P}(4) = 4$

also z.B. $a_{1,\mathbb{P}(1)} = a_{1,2}$

$a_{2,\mathbb{P}(2)} = a_{23}$

usw.

* Wir werden nun sehen wie funktioniert die Idee von Determinante für 2×2 und 3×3 Matrizen und ob wir das gleiche wie auf S. 87' kriegen.

* <u>2×2 Matrizen</u>:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{P} \epsilon_P \prod_{i=1}^{2} a_{i,P(i)} =$$

von 2 Elementen 1,2 gibt es nur 2 Permutationen:

$P(1,2) = 1,2 \rightarrow$ gerade

$P(1,2) = 2,1 \rightarrow$ Ungerade

$$= \underset{(1,2)}{(+1)}\, a_{11} a_{22} + \underset{(2,1)}{(-1)}\, a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

also was wir auf S. 87' hatten.

* <u>3×3 Matrizen</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{P} \epsilon_P \prod_{i=1}^{3} a_{i,P(i)} =$$

von 3 Elementen 1,2,3 gibt es 6 Permutationen.

$P(1,2,3) = 1,2,3 \rightarrow$ Gerade (G)

$= 1,3,2 \rightarrow$ Ungerade (U)

$= 2,1,3 \rightarrow U$

$= 2,3,1 \rightarrow G$

$= 3,1,2 \rightarrow G$

$= 3,2,1 \rightarrow U$

$$= \underset{(1,2,3)}{a_{11} a_{22} a_{33}} - \underset{(1,3,2)}{a_{11} a_{23} a_{32}} - \underset{(2,1,3)}{a_{12} a_{21} a_{33}} + \underset{(2,3,1)}{a_{12} a_{23} a_{31}} + \underset{(3,1,2)}{a_{13} a_{21} a_{32}} - \underset{(3,2,1)}{a_{13} a_{22} a_{31}}$$

also was wir auf S. 87' hatten

* Für eine N×N Matrix gibt es N! Permutationen zu betrachten. Das geht ein bischen komplizierter. Hier ist die Idee von <u>Minor</u> sehr hilfreich.

* Minors (Laplace'scher Entwicklungssatz)

* Wir können die Determinante der 3×3-Matrix so schreiben

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

* Das ist ein Beispiel einer Entwicklung einer Determinante in Minors
* Man definiert den Minor (M_{ij}) assoziiert mit dem Element a_{ij} als die Determinante der Matrix, die man bekommt, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte wegstreicht.

z.B. der Minor von a_{11} ist

$$\begin{matrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv M_{11}$$

und der Minor von a_{12}:

$$\begin{matrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{matrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv M_{12}$$

* Also die 2×2 Determinanten in der Entwicklung der 3×3 Determinante da oben sind einfach die Minors von a_{11}, a_{12} und a_{13}.
* Im allgemeinen für eine $N\times N$ Matrix sind die Minors $(N-1)\times(N-1)$ Determinanten.
* Assoziiert mit der Idee von Minor gibt es die Idee von Cofaktor.

Der Cofaktor ist einfach

$$\underset{\text{Cofaktor}}{C_{ij}} \equiv (-1)^{i+j} \underset{\text{Minor}}{M_{ij}}$$

- z.B. in unserem Beispiel:

$$C_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

aber $C_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

- Mit dem <u>laplace'schen Entwicklungssatz</u> kann man die Determinante einer $N \times N$ Matrix "nach einer Zeile oder Spalte entwickeln".

  - Entwicklung nach der j-ten Spalte $\Big\}$ $|A| = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} C_{ij}$

  - Entwicklung nach der i-ten Zeile $\Big\}$ $|A| = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} C_{ij}$

- Der Entwicklungssatz ist sehr nützlich, weil damit können wir ein $N \times N$ Determinante als eine Summe von $(N-1)\times(N-1)$ Determinanten, usw bis wir (2×2)-Determinanten erreichen, die sehr einfach zu machen sind.

z.B. für eine 4×4 Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

und dann können wir die 3×3 Determinanten in (2×2)-Determinanten entwickeln.

- <u>BEISPIEL</u>:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{-1}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

* BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 1 + 2 = 4$$

- Eigenschaften der Determinanten

- Die Determinanten erfüllen einigen wichtigen Eigenschaften

1) Der Umtausch von 2 Zeilen oder 2 Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & a_{31} \\ a_{22} & a_{12} & a_{32} \\ a_{23} & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Diese Eigenschaft ist sehr einfach zu beweisen, und zwar aus der Definition von Determinante (die Faktoren ε_p ändern das Vorzeichen)

2) Wenn eine Matrix A hat 2 gleiche Spalten oder Zeilen, dann ist $|A| = 0$.

Das ist ein Folge der Eigenschaft 1:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \longrightarrow \text{Also } |A| = -|A| \longrightarrow \text{also } |A| = 0$$

sind gleich

wegen 1

3) Wenn alle Elemente auf einer Spalte oder auf einer Zeile Null sind, dann $|A| = 0$

z. B. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{31} \\ a_{12} & 0 & a_{32} \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

4) Wenn wir multiplizieren alle Elemente einer Spalte oder einer Zeile mal einer Konstante, dann wird die Determinante multipliziert mal diese Konstante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & \alpha a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

⑤ Wir nehmen eine Spalte, und wir addieren zu dieser Spalte ein Mehrfach anderer Spalte, dann bleibt die Determinante gleich:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\gamma a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\gamma a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\gamma a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Das ist ganz einfach zu beweisen:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\gamma a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\gamma a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\gamma a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \gamma \cancel{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

0 wegen ②

aus dem Laplace'schen Entwicklungssatz und Eigenschaft ④

⑥ <u>Produkt Theorem</u>

- Seien A und B zwei $N \times N$ Matrices
- Dann $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

- <u>Beweis</u>: Sei $C = A \cdot B \longrightarrow C_{ij} = \sum_K a_{iK} b_{Kj}$

Seien die Vektoren $\vec{C}_j \equiv (C_{1j}, \dots, C_{Nj})$, $\vec{a}_K = (a_{1K}, \dots, a_{NK})$

Also $\vec{C}_j = \sum_K b_{Kj} \vec{a}_K \longrightarrow \vec{C}_1 = \sum_{K_1} b_{K_1,1} \vec{a}_{K_1}$

$$\vdots$$

$$\vec{C}_N = \sum_{K_N} b_{K_N,N} \vec{a}_{K_N}$$

Dann $C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} = \left[(\vec{C}_1), \dots, (\vec{C}_N) \right] = \sum_{K_1 \dots K_N} b_{K_1,1} \cdots b_{K_N,N} \left[(\vec{a}_{K_1}), \dots, (\vec{a}_{K_N}) \right]$

aber $\{K_1, \dots, K_N\} = \mathbb{P}(1, \dots, N) \rightarrow K_j = \mathbb{P}(j)$

Aus der Eigenschaft ① $\left| (\vec{a}_{\mathbb{P}(1)}), \dots, (\vec{a}_{\mathbb{P}(N)}) \right| = \epsilon_{\mathbb{P}} \left| (\vec{a}_1), \dots, (\vec{a}_N) \right| = \epsilon_{\mathbb{P}} |A|$

Also $|C| = \sum_{\mathbb{P}} \epsilon_{\mathbb{P}} b_{\mathbb{P}(1),1} \cdots b_{\mathbb{P}(N),N} |A| \underset{\uparrow}{=} |B| |A| \longrightarrow$ Q.E.D.

$|\alpha A + \beta B| = \alpha |A| + \beta |B|$ (Linearität)

per definitionem

Inverse einer Matrix

* Sei A eine $N\times N$ Matrix
* Wir suchen nun nach einer Matrix A^{-1}, solch daß

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1} A = \mathbb{1}$$

A^{-1} ist die Inverse von A

* Um eine Matrix zu invertieren, folgt man einige Schritten:

① Man rechnet $|A|$

(Bemerkung: wenn $|A|=0$ ist die Matrix singulär, und kann nicht invertiert werden)

② Für jedes Element a_{ij} rechnet man den Cofaktor C_{ij} (S. 126).
Die Cofaktoren bauen eine Matrix C.

③ Wir rechnen die transponierte Matrix von $C \longrightarrow C^T$
Man definiert die Transponierte Matrix von C, als die Matrix mit Elementen $(C^T)_{ij} = C_{ji}$. Also man tauscht die Ordnung $ij \to ji$ um.

④ Die Inverse von A ist einfach $\boxed{A^{-1} = \dfrac{C^T}{|A|}}$

BEISPIEL: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Determinant: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} & 2 \\ \cancel{0} & 1 & \cancel{0} \\ 2 & \cancel{1} & 1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

Cofaktoren
$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann $A^{-1} = \dfrac{1}{(-3)} C^T = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Ihr könnt checken, daß $A^{-1}A = \mathbb{1}$, $AA^{-1} = \mathbb{1}$

• Lineare Gleichungssysteme

• Eine der wichtigsten Anwendungen der Matrizen (und besonders der Determinante) liegt bei der Lösung von linearen Gleichungssysteme der Form:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1}x_1 + \dots + a_{NN}x_N & = & b_N \end{array}\right\}$$

wobei $x_1, \dots, x_N$ die Unbekannten sind, und a_{ij}, b_j sind Koeffizienten.

• Wenn $b_1 = \dots = b_N = 0$ spricht man von einem <u>homogenen</u> Gleichungssystem, und wenn das nicht der Fall ist spricht man von einem <u>inhomogenen</u> Gleichungssystem.

• Das Gleichungssystem kann so geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

• Also, ein homogenes Gleichungssystem ist der Form $A \cdot \vec{x} = 0$. Das hat natürlich immer eine triviale Lösung: $\vec{x} = 0$. Die Frage ist natürlich, ob es eine nicht triviale Lösung gibt.

• Suchen wir das. ~~[illegible]~~

Wir multiplizieren

$$x_1 |A| \overset{\text{Eigenschaft } ④}{=} \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}x_1 & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \overset{\text{Eigenschaft } ⑤}{=} \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_N & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

* Sei ein homogenes System : $b_1 = \dots = b_N = 0$

Dann $x_1 |A| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \underset{\text{Eigenschaft ③}}{=} 0$

Also wenn $|A| \neq 0 \longrightarrow x_1 = 0 \longrightarrow$ Das ist die Triviale Lösung: $\vec{x} = 0$

Also wir können eine nicht triviale Lösung eines homogenen Gleichungssystem nur lösen, wenn $|A| = 0$

z.B. $\left.\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A \cdot \vec{x} = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +1 - 1 = 0$$

Dies Gleichungssysteme hat also nicht triviale Lösungen.
Diese Lösungen sind eigentlich ~~der~~ Form $(x, y, z) = (\gamma, 0, -\gamma)$
wobei γ ist eine beliebige Konstante.

. Wenn das System inhomogen ist, dann

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_N & a_{N2} & \cdots & a_{1N} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|} \left| (\vec{b}), (\vec{a}_2), \dots, (\vec{a}_N) \right|$$

und $$x_j = \frac{1}{|A|} \left| (\vec{a}_1), \dots, (\vec{a}_{j-1}), (\vec{b}), (\vec{a}_{j+1}), \dots, (\vec{a}_N) \right|$$

z.B. $\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\}$

$$\longrightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\longrightarrow x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

* Bemerkung: Man kann sehr einfach sehen, dass
$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

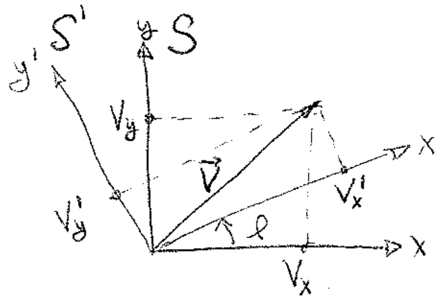
z.B. $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1} = -1$$

• ORTHOGONALE MATRIZEN

· Auf S. 117 haben wir gesehen, daß eine wichtige Anwendung der Matrizen bei der Drehung von Koordinatensystemen liegt.



Wir haben gesehen, daß

$$V_i' = \sum_j a_{ij} V_j$$

wobei $\{V_j\} \longrightarrow$ alte Koordinaten im System S

$\{V_j'\} \longrightarrow$ neue Koordinaten im System S'

· Die Transformation kann also so geschrieben werden $\Longrightarrow \vec{V}' = A \cdot \vec{V}$

· Die Matrix A muss aber bestimmte Bedingungen erfüllen.

Besonders wichtig ist, daß die Länge des Vektors ändert sich bei der Drehung der Achsen natürlich nicht.

Also $|\vec{V}'| = \vec{V}' \cdot \vec{V}' = |\vec{V}|^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$

Also $\vec{V}' \cdot \vec{V}' = \sum_i V_i' V_i' = \vec{V} \cdot \vec{V} = \sum_j V_j V_j$

Also: $\sum_i V_i' V_i' = \sum_i \left[\sum_j a_{ij} V_j\right]\left[\sum_k a_{ik} V_k\right] = \sum_{j,k} V_j V_k \sum_i a_{ij} a_{ik}$

Also: $\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \Leftarrow$ Kronecker Delta (S. 4)

· Ich erinnere euch an der Definition von transponierter Matrix (S. 130)

Wenn die Elementen von A sind a_{ij}, die von A^T sind a_{ji}

Also $\longrightarrow \sum_i a_{ij} a_{ik} = \sum_i (A^T)_{ji} (A)_{ik} = (A^T \cdot A)_{jk}$

$a_{ij} = (A^T)_{ji}$

· Also $(A^T \cdot A)_{jk} = \delta_{jk} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per definitionem} \\ \text{von Identitätsmatrix} \\ \text{(S. 122)}}}{=\!=} \mathbb{1}_{jk}$

Und damit $\boxed{A^T \cdot A = \mathbb{1}}$ $\Longrightarrow$ <u>Orthogonalitätsbedingung</u>
(auch $A \cdot A^T = \mathbb{1}$)

· Die Matrizen, die die Orthogonalitätsbedingung erfüllen, heißen <u>Orthogonale Matrizen</u>. Diese Art von Matrizen sind besonders wichtig.

* Aus der Orthogonalitätsbedingung ist es klar, daß für orthogonalen Matrizen:

$$\boxed{A^T = A^{-1}}$$

· Die orthogonale Transformation $\vec{V}' = A \cdot \vec{V}$ mit $A^T = A^{-1}$ erhalten ebenfalls den Skalarprodukt von 2 beliebigen Vektoren

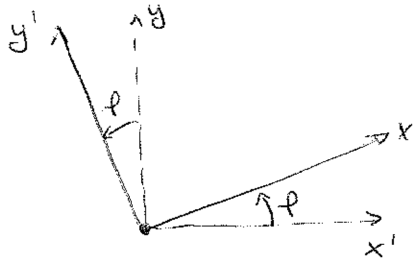
$$\vec{V}' \cdot \vec{W}' = \sum_i V_i' W_i' = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} V_j \Big) \Big(\sum_k a_{ik} W_k \Big)$$
$$\overset{!}{=} \sum_{jk} V_j W_k \underbrace{\sum_i a_{ij} a_{ik}}_{\delta_{jk}} = \sum_j V_j W_j = \vec{V} \cdot \vec{W}$$

Also wenn 2 Vektoren orthogonal sind, $\vec{V} \cdot \vec{w} = 0$, dann bleiben die nach einer orthogonalen Transformation orthogonal $\vec{V}' \cdot \vec{W}' = 0$

(eigentlich daher die Name orthogonale Transformation!)

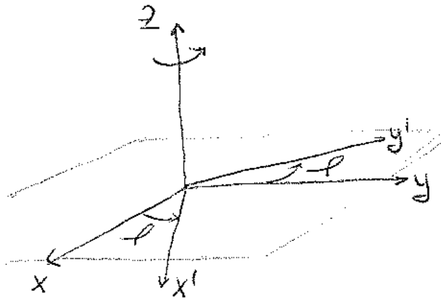
* DREHUNGEN

* Wie schon erwähnt, die Drehungen sind wichtige Beispiele von Orthogonalen Matrizen.



$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

* Wir können diese Drehung als eine Drehung um die z-Achse verstehen. In 3D also:

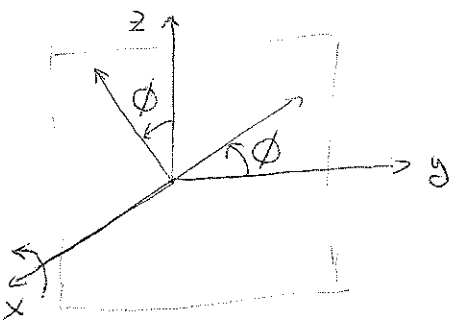


$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z^{(\varphi)}$$

Drehungsmatrix um die z-Achse

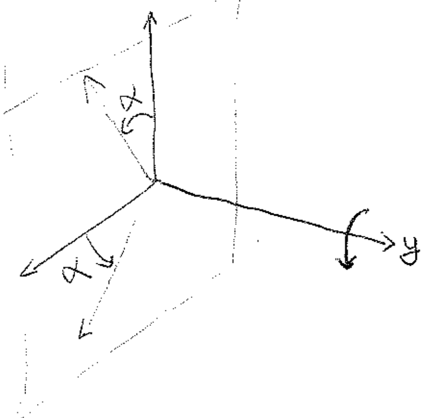
die z-Achse bleibt natürlich erhalten

* Genauso können wir eine Drehung um die x-Achse beschreiben:



$$R_x^{(\phi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

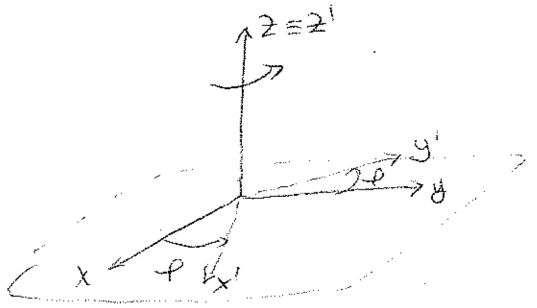
oder um die y-Achse:



$$R_y^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

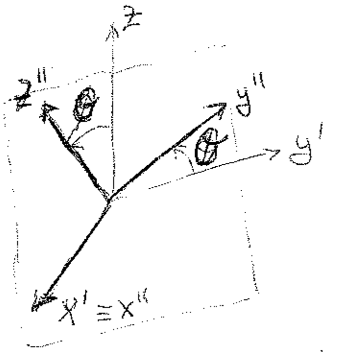
* Nun werden wir 2 Drehungen hintereinander machen, und wir werden überprüfen, dass die Ordnung der Drehung nicht kommutativ ist.

① Wir rotieren erstmal um z



$$\Longrightarrow R_z(\varphi)$$

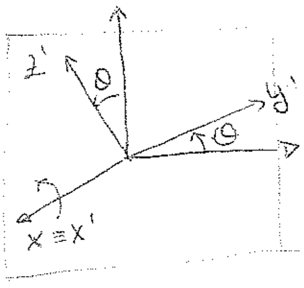
und dann um die x'-Achse



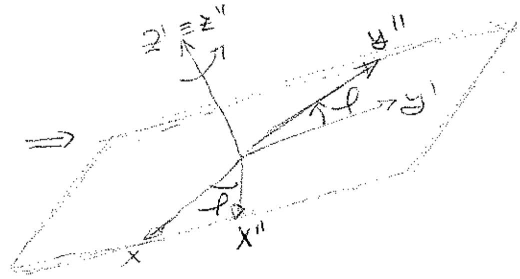
$$\Longrightarrow \underbrace{R_x(\theta)}_{\text{dann um } x} \cdot \underbrace{R_z(\varphi)}_{\text{erst um } z}$$

$$R_x(\theta)R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta \\ +\sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

② Wir rotieren erstmal um x und dann um z'



$\Longrightarrow$



Es ist klar sogar aus der Abbildung, daß die Ordnung der Drehung ist doch sehr wichtig.

$$R_z(\varphi)R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \neq R_x(\theta)R_z(\varphi)$$

- HAUPTACHSENTRANSFORMATION (DIAGONALISIERUNG)

- Diagonale Matrizen (S. 122) sind besonders einfach zu behandeln

z.B. die Inverse einer diagonalen Matrix ist einfach

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N^{-1} \end{pmatrix}$$

- Wir können eine Matrix $A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$ in eine diagonale Matrix verwandeln, und zwar mit Hilfe der sogen. Hauptachsentransformation (auch Diagonalisierung genannt).

Die Diagonalisierung spielt eine extrem wichtige Rolle in der theoretischen Physik!

- Die Hauptachsentransformation ist ein Beispiel einer sogen. orthogonale Ähnlichkeitstransformation. Sei R eine orthogonale Matrix, und A eine Matrix die wir transformieren wollen.

Dann $\quad R \cdot A \cdot R^T \quad$ ist eine sogen. orthogonale Ähnlichkeitstransfo.

- Was wir wollen nun nach dieser Ähnlichkeitstransformation ist eine diagonale Matrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$, also

$$R \cdot A \cdot R^T = D$$

- Sei $R^T = \left(\left(\vec{v}_1\right), \ldots, \left(\vec{v}_N\right) \right)$

Dann $R \cdot A \cdot R^T = D \xrightarrow[R^T R = \mathbb{1}]{} A \cdot R^T = R^T \cdot D \rightarrow A\left(\left(\vec{v}_1\right) \cdots \left(\vec{v}_N\right) \right) = \left(\left(\vec{v}_1\right) \cdots \left(\vec{v}_N\right) \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$

also: $\boxed{A \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j}$ ⟶ Das ist eine sogen. <u>Eigenwertgleichung</u>

wobei:

$\lambda_j \Rightarrow$ <u>Eigenwerte</u>: die sind die Elementen auf der Diagonal der diagonalen Matrix

$\vec{v}_j \Rightarrow$ <u>Eigenvektoren</u>

· <u>Noch mal</u>: die Ideen von Eigenwertgleichung, Eigenwert und Eigenvektor sind extrem wichtig. Ihr wird diese Ideen sehr sehr oft in folgenden Jahren treffen!

· Wir können die Eigenwertgleichung so schreiben

$$(A - \lambda \mathbb{1}) \vec{v} = 0$$

Das ist ein Beispiel eines homogenen Gleichungssystem (S. 131). Wie wir schon gesehen haben, dies Gleichungssystem hat nur nicht-triviale Lösungen wenn

$$\underbrace{|A - \lambda \mathbb{1}|}_{} = 0 \longrightarrow \text{\underline{Säkulargleichung}}$$

Für eine Matrix N×N, das ist ein Polynom N-ter Ordnung (sogen. <u>Charakteristisches Polynom</u>) in λ, also ein Polynom der Form $\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_N \lambda^N = 0$

Das Polynom hat N Lösungen ⟶ die N Eigenwerte $\{\lambda_1 \dots \lambda_N\}$

* Wenn die Matrix symmetrisch ~~und~~ reell

$$A = A^T \longrightarrow a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } i,j$$

dann:

* Die Eigenwerte sind reell $\longrightarrow \lambda_j \in \mathbb{R}$ für alle j
* Die Eigenvektoren sind orthogonal $\longrightarrow \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$

Beweis

- Seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Eigenvektoren mit Eigenwerten λ und γ $(\lambda \neq \gamma)$

Dann $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$

$A\vec{w} = \gamma \vec{w}$

Dann $(\lambda - \gamma)\,\vec{v}\cdot\vec{w} = (\lambda\vec{v})\cdot\vec{w} - \vec{v}\cdot(\gamma\vec{w}) = (A\vec{v})\cdot\vec{w} - \vec{v}(A\vec{w})$

Aber

$$(A\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = \sum_i (A\cdot\vec{v})_i\, w_i = \sum_{i,j} a_{ij} v_j w_i = \sum_j v_j \sum_i a_{ij} w_i \overset{a_{ij}=a_{ji}}{=}$$

$$= \sum_j v_j \sum_i a_{ji} w_i = \sum_j v_j (A\vec{w})_j = \vec{v}\cdot(A\vec{w})$$

Also $(\lambda - \gamma)\,\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

Da $\gamma \neq \lambda \longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \longrightarrow$ Die Eigenvektoren sind orthogonalen.

- Wenn 2 Eigenwerten gleich sind (man sagt, daß die Eigenwerte entartet sind), dann ist es nicht automatisch, daß die Eigenvektoren orthogonal sind. Wir können die aber immer so auswählen, in solcher Weise, daß die orthogonal sind. Wir werden das später im Rahmen eines Beispiels sehen.

- Die Eigenvektoren bauen also ein orthonormales System, also ein neues Koordinatensystem $\longrightarrow$ Hauptachsen

- BEISPIEL (I)

- Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* Säkulargleichung $\Rightarrow |A - \lambda \mathbb{1}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$= -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

Also $\boxed{\lambda(\lambda^2-1) = 0}$ wie erwartet ist das Polynom ein Polynom 3-ter Ordnung

charakteristisches Polynom

* Die Lösungen sind $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$

- Wir müssen nun die entsprechenden Eigenvektoren finden. Wir suchen nach einen Eigenvektor der Form $\vec{v} = (x, y, z)$ solch daß:

$(A - \lambda \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

z.B. für $\lambda = -1$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ Der Eigenvektor ist der Form $\vec{v}_{-1} = (\gamma, -\gamma, 0)$

Wir müssen nun γ bestimmen, und zwar wir wollen, daß $|\vec{v}_{-1}|^2 = 1 \longrightarrow \vec{v}_{-1}^{\,2} = 2\gamma^2 = 1 \longrightarrow \gamma = 1/\sqrt{2}$

Also $\vec{v}_{-1} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$

* Und genauso $\longrightarrow \vec{v}_{+1} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\vec{v}_0 = (0, 0, 1)$

- Man kann sofort sehen, daß $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$

• <u>BEISPIEL (II)</u>: Wir werden nun sehen, was passiert wenn 2 Eigenwerte entartet sind.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda \mathbb{1}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \longrightarrow$ 3 Lösungen $\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{matrix}\right\}$ ← Entartung! , $\lambda = -1$

Für $\lambda = -1$: $(A - \lambda \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → $x = 0$, $y + z = 0$ → $\vec{v}_{-1} = (0, \gamma, -\gamma)$ $\Downarrow |\vec{v}_{-1}|^2 = 1$ $\boxed{\vec{v}_{-1} = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}$

Für $\lambda = 1$: $(A - \lambda \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z$

• Also $\vec{v}_1 = (x, y, y)$, ganz klar $\vec{v}_{-1} \cdot \vec{v}_1 = 0$, aber nun wir haben mehrere (eigentlich unendlich viele) Möglichkeiten.

• Sei $x = 0 \longrightarrow \vec{v}_1^{(1)} = (0, y, y) \xrightarrow[|\vec{v}_1|^2 = 1]{} \boxed{\vec{v}_1^{(1)} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}$

• Wir brauchen noch einen Eigenvektor der Form $\vec{v}_1^{(2)} = (x, y, y)$, der ebenfalls orthogonal zu $\vec{v}_1^{(1)}$ ist:

$$\vec{v}_1^{(1)} \cdot \vec{v}_1^{(2)} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \cdot (x, y, y) = \sqrt{2}\, y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Also $\boxed{\vec{v}_1^{(2)} = (1, 0, 0)}$

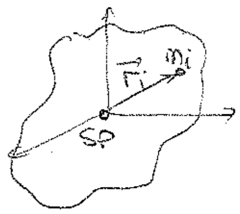
• Die allgemeine Idee ist also, daß wenn wir entartete Eigenwerte finden, wir müssen erstmal die Familie der Eigenvektoren (in dem Fall (x, y, y)) bestimmen. Wir suchen dann nach Vektoren der Familie, die miteinander orthogonal seind.

• STARRER KÖRPER II: DER TRÄGHEITSTENSOR

* Wir werden nun eine wichtige Anwendung der Matrizen (und insbesondere der Hauptachsentransformation) in der Mechanik sehen.

* Auf S. 100 haben wir die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse diskutiert. Wir werden nun sehen was passiert wenn die Drehachse nicht fest ist.

* Wir betrachten einen starren Körper, und zwar im Schwerpunktsystem.



Wir betrachten erstmal den Festkörper als eine Sammlung von kleinen Massen m_i.

* Sei $\vec{\omega}(t) \longrightarrow$ die Drehgeschwindigkeit um eine momentane Achse (wie gesagt $\vec{\omega}(t)$ bleibt nun nicht unbedingt fest)

* Aus unserer Diskussion von S. 100 haben wir daß $\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

und:
$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \right]$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{e}_x (\omega_y z - \omega_z y) + \vec{e}_y (\omega_z x - \omega_x z) + \vec{e}_z (\omega_x y - \omega_y x)$$

$$\begin{aligned}
[\vec{\omega} \times \vec{r}]^2 &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\
&= \omega_y^2 z^2 + \omega_z^2 y^2 - 2\omega_y z \omega_z y + \omega_z^2 x^2 + \omega_x^2 z^2 - 2\omega_z x \omega_x z + \omega_x^2 y^2 + \omega_y^2 x^2 - 2\omega_x y \omega_y x \\
&= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - \omega_x^2 x^2 - \omega_y^2 y^2 - \omega_z^2 z^2 - 2\omega_y y \omega_z z - 2\omega_x x \omega_z z - 2\omega_y y \omega_x x \\
&= |\vec{\omega}|^2 |\vec{r}|^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2
\end{aligned}$$

* Sei $\vec{r}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

Dann:

$$2T = \omega_1^2 \sum_i m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) - \omega_1\omega_2 \sum_i m_i x_{i1} x_{i2} - \omega_1\omega_3 \sum_i m_i x_{i1} x_{i3}$$
$$- \omega_2\omega_3 \sum_i m_i x_{i2} x_{i1} + \omega_2^2 \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) - \omega_2\omega_3 \sum_i m_i x_{i2} x_{i3}$$
$$- \omega_3\omega_1 \sum_i m_i x_{i3} x_{i1} - \omega_3\omega_2 \sum_i m_i x_{i3} x_{i2} + \omega_3^2 \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2)$$

Und das kann so geschrieben werden:

$$2T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \sum_i m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i1} x_{i2} & -\sum_i m_i x_{i1} x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i2} x_{i1} & \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_i m_i x_{i2} x_{i3} \\ -\sum_i m_i x_{i3} x_{i1} & -\sum_i m_i x_{i3} x_{i2} & \sum_i m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

(Bemerkung: auf Seite 119 haben wir das Produkt $A\vec{v}$ gesehen.
genauso ähnlich geht das Produkt ~~[illegible]~~ $\vec{v} \cdot \vec{A} \Rightarrow$

$$\vec{v} \cdot \vec{A} = (v_1, v_2, \dots, v_N) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} = (w_1, \dots, w_N)$$

wobei $w_i = \sum_j v_i a_{ij}$) $\longrightarrow$ (Sieh die Bemerkung auf S. 141')

Wir können also die kinetische Energie so schreiben

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot J \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{3} \omega_l J_{lm} \omega_m}$$

wobei J der sogen. Trägheitstensor ist

$$\boxed{J_{lm} = \sum_i m_i (\vec{r}_i^{\,2} \delta_{lm} - x_{il} x_{im})} \qquad l,m = 1,2,3$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung mit Massendichte $\rho(\vec{r})$

$$\boxed{J_{lm} = \int d^3r \; \rho(\vec{r}) \left[r^2 \delta_{lm} - x_l x_m \right]}$$

* Bemerkung

- Wir können den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

als eine Matrix $N \times 1$ $\longrightarrow$ also N Zeilen und 1 Spalte.

- Damit ist $(v_1, \ldots, v_N) = \vec{v}^T$

also eine Matrix mit $1 \times N$ $\longrightarrow$ 1 Zeile, N Spalten

- Damit können wir den Skalarprodukt (S. 2) von 2 Vektoren $\vec{u} \cdot \vec{v}$ eigentlich als der Produkt von 2 Matrizen $\vec{u}^T \cdot \vec{v}$, also:

$$\vec{u}^T \cdot \vec{v} = (u_1, \ldots, u_N) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = u_1 v_1 + \ldots + u_N v_N$$

- Damit $(u_1, \ldots, u_N) \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1N} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{N1} \cdots a_{NN} \end{pmatrix} = \vec{u}^T \cdot \vec{A} = (w_1, \ldots, w_N) = \vec{w}^T$

und $(u_1 \ldots u_N) \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1N} \\ a_{N1} \cdots a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \vec{u}^T \cdot \vec{A} \cdot \vec{v}$

* Für den Fall einer festen Achse, wir definieren den Einheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = (n_1, n_2, n_3) \longrightarrow \omega_j = \omega n_j \qquad j = 1,2,3$$

Also $T = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum_{l,m} n_l J_{lm} n_m\right]}_{J_{\vec{n}}} \omega^2$

$J_{\vec{n}} \equiv$ Trägheitsmoment um die feste Achse (S. 101)

Also wenn wir den Trägheitstensor kennen, dann können wir den Trägheitsmoment um alle möglichen Achsen bestimmen.

· Hauptträgheitsachsen

· Der Trägheitstensor ist eine 3×3 Matrix die reell ($J_{lm} \in \mathbb{R}$) und symmetrisch ($J_{lm} = J_{ml}$) ist. Aus unserer Diskussion der S. 137 wissen wir also, daß die Eigenwerte der Matrix J reell sind, und daß die entsprechenden Eigenvektoren orthogonal sind.

· Die Eigenwerte des Trägheitstensors sind die sogen. Hauptträgheitsmomente, und die entsprechenden Eigenvektoren sind die sogen. Hauptträgheitsachsen

$$J \xrightarrow{\text{Diagonalisierung}} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$A, B, C \rightarrow$ Hauptträgheitsmomente

$\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta} \rightarrow$ Hauptträgheitsachsen

* Die Hauptträgheitsachsen spielen eine sehr wichtige Rolle bei der Beschreibung der Bewegung von starren Körper, aber eine komplette Darstellung dieser Physik werden wir hier nicht machen.