Newton-Mechanik

Wir werden ~~nun~~ unserer erster Kontakt mit der Physik haben, und zwar mit der Newton-Mechanik. Ihr habt ganz sicher schon was von Newton-Mechanik gehört, Wir werden erstmals "alte" Ideen auffrischen, und auch ein Paar neuer Ideen einführen.

Wir werden erstmals die Physik eines Massenpunktes betrachten. Einer Massenpunkt (mit vernachlässigbarer Ausdehnung) mit einer Masse m hat eine Dynamik charakterisiert durch eine Reihe von Vektoren die wir schon gesehen haben (S. 10), und zwar:

- Ortsvektor: $\vec{r}(t)$
- Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$
- Beschleunigungsvektor: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Note: Hier führe ich die Schreibweise $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ein)

Die Hauptsätze der Dynamik sind die sogen. Newton'sche Gesetze, und die bestimmen die Dynamik eines Massenpunktes.

1. Newton'sches Gesetz (Galilei'sches Trägheitsgesetz)

"Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen Bewegung ($\vec{a}(t) = 0$ für alle t), wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern".

Aus dem Alltag haben wir nicht so ein Gefühl, weil es immer irgendwelche Reibung, die die Bewegung dämpft. Aber guck mal was passiert im Allraum (oder auf einer glatten Fläche). Man setzt etwas in Bewegung und es bleibt (im Prinzip für immer) so.

• Kraft und Trägheit

Aber wenn eine Kraft geübt wird, dann wird der Köper beschleunigt. Aus unserer täglichen Erfährung ist es aber klar, dass dieselbe Kraft geübt an verschiedenen Köper verschiedenen Beschleunigungen ergibt.

· Es gibt einer sogen. Trägheitswiderstand gegen Bewegungsänderungen der körperabhängig ist. Dieser Trägheitswiderstand wird durch die sogen. träge Masse (m_t) charakterisiert.

• Impuls

· Das Produkt aus träger Masse und Geschwindigkeit heißt

Impuls $\Longrightarrow$ $\vec{p} = m_t \vec{v}$ $\longrightarrow$ auch ein Vektor.

· Der Impuls ist ein sehr wichtiger Begriff der Physik!

• 2. Newton'sches Gesetz (Bewegungsgesetz)

· Wie schon erwähnt, eine Kraft ändert die Bewegung eines Körpers. Die Frage ist natürlich, wie?

· Die Änderung des Impulses ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft:

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m_t \vec{v})}$$

(Note: die Kraft ist ebenfalls ein Vektor!)

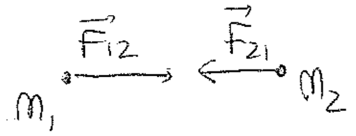
· Falls die träge Masse nicht zeitabhängig ist, dann

$$\boxed{\vec{F} = m_t \frac{d\vec{v}}{dt} = m_t \vec{a}}$$

(Bemerkung: die m_t ist typischerweise zeitunabhängig, aber nicht immer! z.B. in Raketen ist die nicht zeitunabhängig!)

- <u>3. Newtonsches Gesetz (Reaktionsprinzip oder Actio = Reactio)</u>

- Nehmen wir 2 Körper. Sei $\vec{F}_{12}$ die Kraft des Körpers 2



auf Körper 1, und $\vec{F}_{21}$ die Kraft des Körpers 1 auf Körper 2.

Dann gilt $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

- Dieses Prinzip hat wichtige Folgen, wie wir später sehen werden.
- Also, z.B. die Erde zieht von mir (Schwerkraft), aber ich ziehe auch von der Erde! Natürlich meine Trägemasse ist viel viel kleiner als die von der Erde, und deswegen fühlt man das nicht.

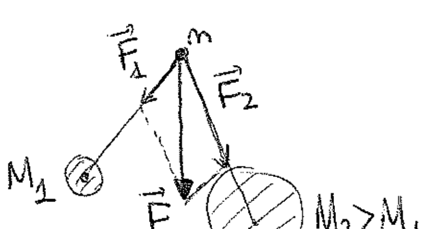
- <u>Superpositionsprinzip</u>
- Dies Prinzip ist wichtig und kommt direkt aus der Linearität (s. ②).

Wirken auf einen Massenpunkt mehrere Kräfte: $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ so addieren sich diese wie Vektoren (s. ②) zu einer Resultanten

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}$$

- Es ist diese gesamte Kraft $\vec{F}$, die die wichtig für die Bewegungsgleichung des Massenpunktes ist.

Zum Beispiel, sei ein ~~Sattelit~~ Satellit mit Masse m die von 2 Planeten



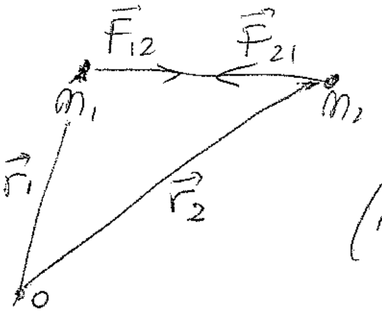
angezogen wird (Anziehungskraft $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$). Die Dynamik wird von der Summe $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ gegeben.

- Beispiele von Kräfte

- Die Schwerkraft
  - Jeder Körper im Schwerefeld der Erde erfährt die Schwerkraft: $\vec{F}_S = m_S \vec{g}$
    wobei $|\vec{g}| = 9,81\ m/s^2$ und $\vec{g}$ zeigt in Richtung des Zentrums der Erde.
  - m_S ist die sogen. Schwere Masse, und bestimmt wie ein Körper durch die Schwerkraft beinflüßt wird.
  - Die Identität $m_S = m_t = m$ ist keine Selbstverständlichkeit!
    und ist die sogen. Einstein'sches Äquivalenzprinzip.
    Dieses Prinzip bildet eigentlich die Grundlagen der Allgemeine Relativitätstheorie (also: aufpassen mit Selbstverständlichkeiten!)

(Bemerkung: Die Gültigkeit dieses Prinzips wird immer noch experimentell geprüft. Sehr präzise Experimente haben gezeigt, daß $m_S/m_t = 1 + \epsilon$ wobei $|\epsilon| < 10^{-13}$ ist.)

- Von nun an, schreiben wir einfach m.
- Noch eine Bemerkung. $\vec{F}_S$ oben ist nur die Schwerkraft in der Nähe der Erde. In allgemeinen, für 2 Körper mit Massen m_1 und m_2, ist die Schwerkraft:



$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

wobei G die Gravitationskonstante ist.

(Bemerkung: $G \cong 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$)

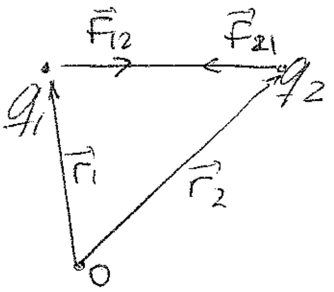
· Die Schwerkraft hängt also vom Abstand ab, und zwar

$$|\vec{F}_{12}| \propto \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}$$

und außerdem $\vec{F}_{12}$ zeigt in Richtung der Gerade, die die 2 Körper verknüpft.

· Die Coulomb-Kraft

· Die ist die Kraft zwischen 2 geladenen Teilchen



$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

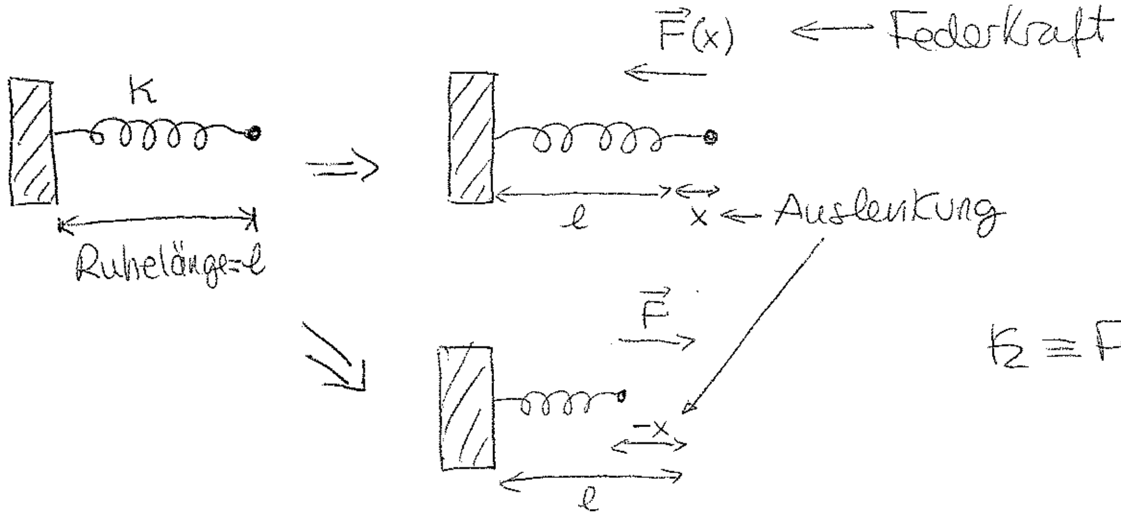
wobei q_1, q_2 sind die Ladungen.

(Bemerkung: k ist eine positive Konstante)

. Eigentlich die Coulombkraft und die Schwerkraft sind sehr ähnlich! Der Unterschied liegt an der Tatsache, daß es positive und negative Ladungen gibt. Daher ist die Coulombkraft attraktiv wenn $q_1 q_2 < 0$ (positiv mit negativ) und repulsiv wenn $q_1 q_2 > 0$ (+ mit +, oder − mit −). Im Gegenteil ist die Schwerkraft immer eine anziehende Kraft.

· Das erklärt eigentlich warum ist die (relativ schwache) Schwerkraft die dominante Kraft in der größen Strukturen im All.

· Die Federkraft



$k \equiv$ Federkonstante

Die Federkraft ist die rücktreibende Kraft einer Feder. Sie ist proportional zur Auslenkung x. Die Proportionalitätskonstante ist die sogen. Federkonstante

$$\vec F = -k x \vec e_x$$

(Bemerkung: in 3D: $\vec F = -k \vec r$)

· Diese Kraft ist besonders wichtig in der Theorie des harmonischen Oszillators. Wir werden später in der Vorlesungsreihe viel mehr über die Federkraft lernen.

· Die Reibungskraft

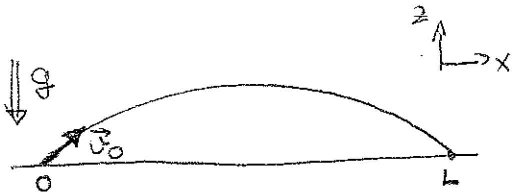
· Wir haben alle ein Gefühl, was Reibung ist. Die Beschreibung der Reibung ist trotzdem ziemlich kompliziert. Trotzdem, in guter Näherung hängt diese Kraft von der Geschwindigkeit $\vec v$ ab, und zwar als

$\vec F = -\alpha \vec v$, wobei die "Konstante" $\alpha > 0$ auch eine Funktion der Geschwindigkeit sein kann. In dem einfachsten Modell ist sie doch konstant. Mehr über die Reibungskraft später.

• Ein einfaches Beispiel Newton'scher Dynamik

• Eine Kanone schießt ein Kugel am $\vec{r}=0$ mit Anfangsgeschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z .$$



Wir vernachläßigen die Reibung der Atmosphäre, und betrachten nur die Effekte der Schwerkraft der Erde: $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$

• Aus dem Bewegungsgesetz

$$\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{a} = -g\,\vec{e}_z \longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -g\,\vec{e}_z$$

Diese Gleichung ist eine Vektorgleichung. Eigentlich haben wir hier 3 verschiedene Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_z}{dt} &= -g \end{aligned} \right\}$$

Wir haben eine Gleichung für jeden Komponente.

* Die erste 2 Gleichungen bedeuten, daß v_x und v_y eigentlich konstant sind. Also

$$v_x(t) = v_x(t=0) = v_{0x}$$
$$v_y(t) = v_y(t=0) = 0$$

* Die 3. Gleichung ist ein bisschen schwieriger.

Wir schreiben die Gleichung ein bisschen um:

$$dv_z = -g\,dt$$

Und wir integrieren

$$\int_{v_z(0)}^{v_z(t)} dv_z = -g\int_0^t dt \longrightarrow v_z(t) - v_z(0) = -gt$$

(Note: Wir werden mehr über Integration später lernen, aber dies Integral sollte klar sein.)

Also $v_z(t) = v_{0z} - gt$

Also $\boxed{\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{e}_x + v_z(t)\,\vec{e}_z = \vec{v}_0 - gt\,\vec{e}_z}$

* Per Definitionem: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

Hier haben wir noch mal 3 Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} \longrightarrow \int_{x(0)=0}^{x(t)} dx = v_{0x}\int_0^t dt \Rightarrow x(t) = v_{0x}t$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = 0 \longrightarrow \int_{y(0)=0}^{y(t)} dy = 0 \Rightarrow y(t) = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z = v_{0z} - gt \rightarrow \int_{z(0)=0}^{z(t)} dz = v_{0z}\int_0^t dt - g\int_0^t t\,dt$$

$$z(t) = v_{0z}t - gt^2/2$$

· Also $\boxed{\vec{r}(t) = (v_{0x}t)\,\vec{e}_x + (v_{0z}t - gt^2/2)\,\vec{e}_z}$

· Nun können wir studieren, wie die Bewegung des Kugels aussieht. Mögliche Fragen wären:

* z.B. wann trifft der Kugel noch mal den Boden?

Einfach: die Frage andersum, wann ist $z(t)=0$?

$$z(t) = v_{0z}t - gt^2/2 = t\,(v_{0z} - gt/2) = 0$$

Die Lösungen sind also

$t=0 \longrightarrow$ Das war sowieso klar $\rightarrow$ Das ist unsere Anfangsbedingung

$$\boxed{t_{END} = 2v_{0z}/g}$$

* Wie weit ist der Kugel geflogen?

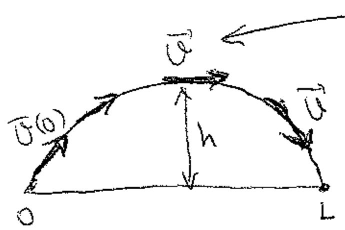
Also: was ist L auf der Abbildung auf S. 26?

Einfach, wir brauchen $x(t_{END}) = v_{0x}\, t_{END}$

Also $$\boxed{L = 2\,\frac{v_{0x} v_{0z}}{g}}$$

* Wie war die maximale Höhe des Kugels?

Diese Frage ist auch einfach, aber vielleicht ein bisschen trickier. Man muß nur nachdenken, was passiert auf dem hoheren Punkt der Bahn des Teilchens.



Auf dem hoheren Punkt $\vec{v}$ geht nur in $\vec{e}_x$ Richtung. Also da $v_z=0$.

Da $v_z(t) = v_{0z} - gt \rightarrow$ das passiert wenn

$t = t_{OBEN} = \dfrac{v_{0z}}{g}$. Wir brauchen nun $h = z(t_{OBEN}) = v_{0z} t_{OBEN} - \frac{g}{2} t_{OBEN}^2$

Also $\boxed{h = v_{0z}^2/2g}$

• ENERGIE

• Die Idee von Energie spielt natürlich eine sehr bedeutende Rolle in der Physik. Wir werden nun ein Paar Begriffe über Energie auffrischen/einführen.

• Kinetische Energie

• Ein Massenpunkt mit Masse m in Bewegung mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat immer eine assoziierte Energie

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} \longleftarrow \text{Kinetische Energie}}$$

(Bemerkung: Man misst die Energie in Joules $J \equiv kg\, m^2/s^2$)

Bemerkung: Ich benutze hier die Schreibweise $\vec{v}^{\,2} \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$)

• Konservative Kräfte / Potentielle Energie

• Eine konservative Kraft ist eine Kraft, die als Gradient einer Skalarfunktion geschrieben werden kann:

$$\boxed{\vec{F}_{KONS} = -\vec{\nabla} V}$$

(aus S. 18 das bedeutet daß $\vec{\nabla} \times \vec{F}_{KONS} = 0$. Das wäre noch eine Definition von konservativen Kräfte)

Die Skalarfunktion $V(\vec{r})$ ist das sogen. Potential der Kraft $\vec{F}_{KONS}$ oder einfach potentielle Energie

• Das ist nicht immer der Fall. Es gibt auch die sogen. dissipative Kräfte, die diese Bedingung nicht erfüllen.

• Wir werden nun sehen, warum heißen eben die konservative Kräfte konservativ.

Die Gesamtkraft auf der Masse m ist die Summe alle Kräfte, d.h. konservative und dissipative Kräfte

$$\vec{F} = \vec{F}_{KONS} + \vec{F}_{DISSIP}$$

* Man definiert die Leistung P als

$$P = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

(Bemerkung: Man mißt die Leistung in Watts, also das kennt Ihr wahrscheinlich vom Alltag)

(Bemerkung (II): Die Idee von Leistung ist mit der Idee von Arbeit verknüpft. Die Definition von Arbeit verlangt aber die Anwendung von Linienintegralen. Die werden wir später sehen, und wir werden dort die Idee von Arbeit einführen.)

- Leistung und kinetische Energie sind miteinander verknüpft:

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. Newton}}}{=} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -P$$

Die Leistung einer konservativen Kraft ist auch mit der potentiellen Energie verknüpft:

$$-\vec{F}_{KONS} \cdot \dot{\vec{r}} = +\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Seite} \\ 15}}{=} \frac{dV}{dt}$$

* Da $\vec{F} \overset{\text{Superpositionsprinzip}}{=} \vec{F}_{KONS} + \vec{F}_{dissip}$:

$$-\frac{d}{dt}T = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -(\vec{F}_{KONS} + \vec{F}_{dissip}) \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{F}_{KONS} \cdot \dot{\vec{r}} - \vec{F}_{dissip} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{dV}{dt} - \vec{F}_{dissip} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Also $\frac{d}{dt}(T+V) = +\vec{F}_{dissip} \cdot \dot{\vec{r}}$

* Das führt uns direkt in die Idee der <u>Energie des Massenpunkten</u>

$$\boxed{E = T + V} \leftarrow$$ die Gesamtenergie des Massenpunktes ist die Summe von kinetischer Energie und potentieller Energie

* Also $$\boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{dissip} \cdot \dot{\vec{r}}}$$

Dann können wir nun verstehen, warum die konservative und dissipative Kräfte so heißen.

- Wenn alle Kräfte konservativ sind $\longrightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

  $\Rightarrow E =$ konstant

  $\Rightarrow$ Die Energie bleibt erhaltet $\Rightarrow$ <u>Energieerhaltungssatz</u>

- Wenn es dissipative Kräfte gibt, bleibt die Energie des Massenpunkts nicht erhaltet.

(<u>Bemerkung</u>: die gesamte Energie des Universums bleibt allerdings erhaltet; z.B: die Reibung ist ein Beispiel dissipativer Kraft. Die Bewegung des Teilchens wird gedämpft, aber die kinetische Energie wird in Wärme umgewandelt. Die Erhaltung der Energie des Universums ist das sogen. 1. Hauptsatz der Thermodynamik, aber das werden wir hier nicht behandeln).

* Wir werden noch mehrere Eigenschaften der konservativen Kräften sehen, wenn wir die Linienintegralen einführen. Das kommt später in dieser Vorlesungsreihe.

* Beispiele von konservativen und dissipativen Kräfte

* Auf S. 23 haben wir die Schwerkraft zwischen 2 Massen diskutiert:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

Wir werden nun sehen, daß diese Kraft konservativ ist, und zwar mit Potential

$$V = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

. Wir werden nun zeigen, daß $\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_1} V$

(Bemerkung: $\vec{\nabla}_{\vec{r}_1} \equiv$ gradient nach $\vec{r}_1$ Komponenten)

$$-\vec{\nabla}_{\vec{r}_1} V = G\, m_1 m_2\, \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} \left(\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \right) = G m_1 m_2\, \vec{\nabla}_{r_1} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}} \right]$$

$$\partial_{x_1} \left[\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}} \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ketten-} \\ \text{-regel}}}{=} \frac{-(x_1-x_2)}{\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{-(x_1-x_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

Genauso für ∂_{y_1} und ∂_{z_1}. Dann:

$$-\vec{\nabla}_{\vec{r}_1} V = -G m_1 m_2 \left(\frac{(x_1-x_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}, \frac{(y_1-y_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}, \frac{(z_1-z_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} \right)$$

$$= -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}$$

$\vec{F}_{12}$ ist also konservativ.

* Auf S. 24 haben wir gesehen, daß die Coulomb-Kraft dieselbe Form als die Schwerkraft hat. Die Coulomb-Kraft ist also auch konservativ.

* Noch ein Beispiel von konservativer Kraft ist die Federkraft (Beweis es!) → Lösung: $\vec{F} = -k\vec{x} \Rightarrow V = \frac{1}{2} k x^2$

* Die Reibungskraft ist dagegen dissipativ, wie schon erwähnt.

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v} \longrightarrow \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\alpha v^2$$

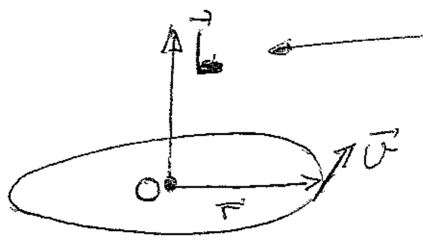
Also $\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2$

$\Rightarrow$ Die Energie des Massenpunktes nimmt wegen der Reibung ständig ab (keine Überraschung, oder?)

• **DREHIMPULS**

• Noch eine wichtige Idee ist die von Drehimpuls (bezogen auf dem Ursprung O)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$



wegen der Eigenschaften des Kreuzprodukts (s. 5) ist $\vec{L}$ immer orthogonal zu $\vec{r}$ und zu $\vec{v}$

· Aus der 2. Newtonschen gesetz können wir sehen daß:

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times(m\ddot{\vec{r}}) = m\,\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} =$$

$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) \overset{\text{Produktregel}}{=} \dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}} + \vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\times\ddot{\vec{r}}$

$$= \frac{d}{dt}(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Der Vektor $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ heißt Drehmoment,

also $\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L}$

· Natürlich wenn $\vec{M}=0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{L}$ ist konstant

$\Downarrow$

Drehimpulserhaltungssatz

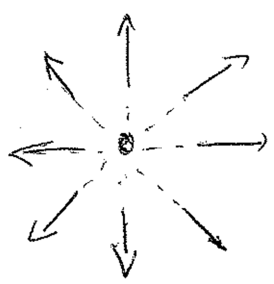
· Das ist der Fall, wenn $\vec{F}$ eine sogenannte Zentralkraft ist.

Eine Zentralkraft ist der Form

$$\vec{F} = f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\,\vec{e}_r$$

Einheitsvektor in die Radialrichtung $\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$

Also was wichtig ist, ist, daß die Kraft in die radiale Richtung wirkt.



· Für diese Kräfte ist der Drehimpuls, bezogen auf das Kraftzentrum, konstant.

· Das ist einfach zu sehen:

$$\vec{r}\times\vec{F} = \left[|\vec{r}|\,\vec{e}_r\right]\times\left[f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right]$$

$$= f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\,|\vec{r}|\,\underbrace{\vec{e}_r\times\vec{e}_r}_{0} = 0$$

Also $\vec{M}=0 \longrightarrow \vec{L}$ ist konstant

* Die Erhaltung von $\vec{L}$ hat sehr wichtige Folgen. Besonders wichtig ist, daß die Bewegung des Teilchens auf einer Ebene stattfinden muß. Sehen wir es.

Per Definitionem: $\vec{L} = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ ist immer orthogonal zu $\vec{r}$. Also $\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$

Aber $\vec{L}$ ist konstant und zwar im Betrag und Richtung $\rightarrow$ Also (L_x, L_y, L_z) bleiben erhaltet.

Also man hat $\boxed{L_x x + L_y y + L_z z = 0}$ und das ist die Gleichung einer Ebene!

• Noch ein letzter Punkt bezüglich ~~[illegible]~~ zentralen Kräfte.

* Eine Zentralkraft ist dazu konservativ wenn $\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r$.

* Wenn das der Fall ist, ist das assoziierte Potential der Form: $V = V(r)$ wobei $r = |\vec{r}|$

(* Bemerkung: Wir haben die Kugelkoordinaten noch nicht eingeführt. Wir werden später sehen, daß $\vec{\nabla} V(r) = \left(\frac{dV}{dr}\right)\vec{e}_r$. Damit $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = \underbrace{\left[-\left(\frac{dV}{dr}\right)\right]}_{f(r)}\vec{e}_r$, wie wir oben gesagt haben.)

* Beispiele von Zentralkräfte:

  * Schwerkraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$

    Diese Kraft ist beides zentral und konservativ.

  * Coulomb-Kraft: wie gesagt, die Coulomb-Kraft hat dieselbe Form wie die Schwerkraft

  * Federkraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -k \vec{r} = -k r \vec{e}_r$

    Noch mal, diese Kraft ist beides zentral und konservativ.