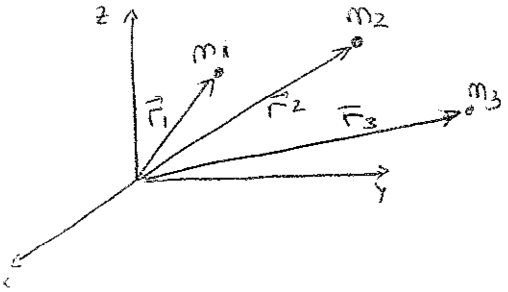
# • Newton-Mechanik II: Mehrteilchensysteme

• Bisher haben wir nur die Physik eines Massenpunktes studiert. Die meisten realistischen physikalischen Systemen setzen sich aber aus mehreren Einzelteilchen zusammen, die miteinander wechselwirken. Wir werden nun die Physik dieser Mehrteilchensysteme studieren.

• Wir haben also ein System mit mehreren Massepunkten $(m_1, \dots, m_n)$ mit Ortsvektoren $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$



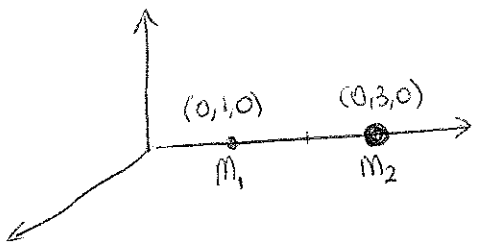

• Eine sehr wichtige und nützliche Idee ist die Idee vom Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

wobei $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ die Gesamtmasse ist

• Man kann den Schwerpunkt als eine Art Durchschnitt verstehen, eine Durchschnittsposition, aber die Teilchen mit größeren Massen wirken in diesem Durchschnitt mehr.

Beispiel: Wir betrachten 2 Massen $m_1 = m$, und $m_2 = 2m$.

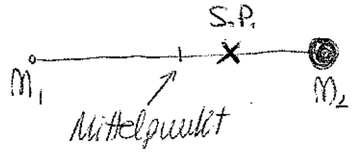



Die Masse $m_1$ ist in (0,1,0) und die Masse $m_2$ ist in (0,3,0). Wo ist der Schwerpunkt?

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{(m_1+m_2)} \left[ m_1 (0,1,0) + m_2 (0,3,0) \right]$$

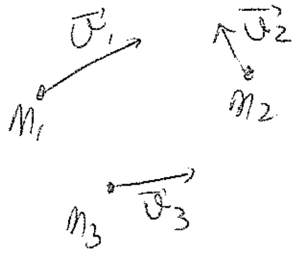
$$= \frac{1}{3m} \left[ m(0,1,0) + 2m(0,3,0) \right] = \frac{1}{3}(0,7,0) = (0, 7/3, 0)$$

Also der Schwerpunkt ist NICHT in dem Mittelpunkt (der wäre (0,2,0)) sondern nach $m_2$ verschoben (weil $m_2$ ist größer):



(Bemerkung: Für 2-Teilchen-Systeme Mittel- und Schwerpunkt sind nur gleich, wenn $m_1 = m_2$)

· Wir wissen schon, daß ein Teilchen mit Masse $m$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ hat.




Wenn wir mehreren Teilchen $(m_1, \dots, m_n)$ mit Geschwindigkeiten $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ haben, definiert man den <u>Gesamtimpuls</u> als:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

· <u>Gesamtimpuls und Schwerpunkt sind miteinander verknüpft.</u> Sehen wir das:

Ich betrachte die Massen als zeitunabhängig

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = M \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = M \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right]$$

also $\boxed{\vec{P} = M\dot{\vec{R}}}$

Gesamtimpuls

Gesamtmasse

Geschwindigkeit des Schwerpunktes

· Aus der Bewegungsgleichung wissen wir wie Beschleunigung und Kraft miteinander verknüpft sind: $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$, wobei $\vec{F}$ die Gesamtkraft auf $m$ ist. Wenn man ein System mehreren Teilchen hat, dann jeder Teilchen $m_i$ erfährt eine Gesamtkraft $\vec{F}_i$.

$\vec{F}_i$ ist die Zusammensetzung von:

· Äußere Kräfte: die die jenseits des Systems verursacht werden.

· Innere Kräfte: die die von andere Teilchen des Systems verursacht werden.

Also: $\vec{F}_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{äußere} \\ \text{Kräfte}}}{\vec{F}_i^{(ex)}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{innere} \\ \text{Kräfte}}}{\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}}$

Wegen Actio = Reactio
$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$
und natürlich $\vec{F}_{ii} = 0$

Suchen wir nun die Gesamtkraft auf dem Teilchensystem

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(ex)}}_{\vec{F}^{(ex)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}}_{\text{das ist Null wegen actio = reactio}}$$

Also die Gesamtkraft auf dem System ist die Summe $\vec{F}^{(ex)}$ von allen äußeren Kräfte.

Gesamtkraft, Gesamtimpuls und Schwerpunkt sind miteinander verknüpft:

$$\vec{F}^{(ex)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \overset{\text{Bewegungsgleichung}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i = M \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right] = M\ddot{\vec{R}}$$

Also $\boxed{\vec{F}^{ex} = M\ddot{\vec{R}}}$ → SCHWERPUNKTSATZ

$\vec{F}^{ex}$: Gesamtkraft; $M$: Gesamtmasse; $\ddot{\vec{R}}$: Beschleunigung des Schwerpunktes

Da $\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \Longrightarrow \boxed{\vec{F}^{(ex)} = \dot{\vec{P}}}$ → IMPULSSATZ

Natürlich, wenn $\vec{F}^{(ex)} = 0$, dann $\dot{\vec{P}} = 0$, $\ddot{\vec{R}} = 0$

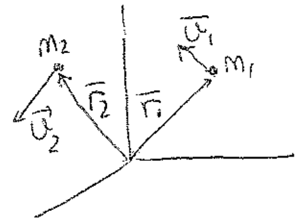
$\boxed{\vec{F}^{(ex)} = 0 \iff \vec{P} = \text{Konstante}}$ → IMPULSERHALTUNGSSATZ

* Auf S. 33 haben wir den Drehimpuls (bezogen auf dem Ursprung O) als $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

In unserem Teilchensystem assoziieren wir für jedes Teilchen j ein Drehimpuls $\vec{L}_j = \vec{r}_j \times \vec{p}_j$.

Damit ist der <u>Gesamtdrehimpuls</u> des Systems

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} m \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$




$\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$ Bewegungsgleichung

$$\text{Dann } \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}}$$

$$\to = \sum_{i,j}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right\} = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right\}$$

actio = reactio

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

$\vec{F}_{ij}$ ist parallel zu $\vec{r}_i - \vec{r}_j$

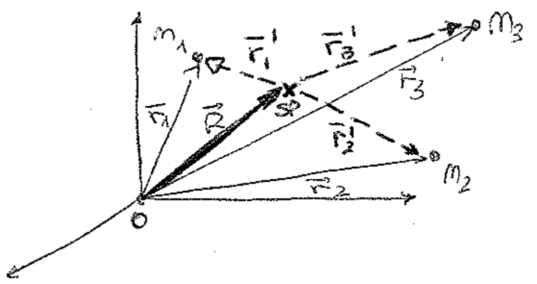
Also
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(ex)} = \vec{M}^{(ex)}$$
<u>Gesamtes äußeres Drehmoment</u>

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)}} \Rightarrow \text{DREHIMPULSSATZ}$$

d.h. daß nur die äußere Kräfte wirken bei der Änderung des Gesamtdrehimpuls.

* Der Gesamtimpuls (S. 38) ist nur mit der Bewegung des Schwerpunkts verknüpft. Mit dem Gesamtdrehimpuls ist es eigentlich anders. Gucken wir es.

Um das zu sehen, führen wir nun ein wichtiges Bezugssystem ein, nämlich das <u>Schwerpunktsystem</u>. Die neue Koordinaten im




Schwerpunktsystem sind

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{R}$$

(<u>Bemerkung</u>: Natürlich im Schwerpunktsystem sind die Schwerpunktkoordinaten (0,0,0))

Wir werden nun sehen, daß man den Drehimpuls in 2 Teilen zerlegen kann: Schwerpunktanteil plus Drehimpuls bezogen auf den Schwerpunkt:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}_i{}') \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i{}')$$

$$= \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M} \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\boxed{\sum_i m_i \vec{r}_i{}'}}\times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \underbrace{\left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i{}'\right)}_{\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i{}'\right)} + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}'$$

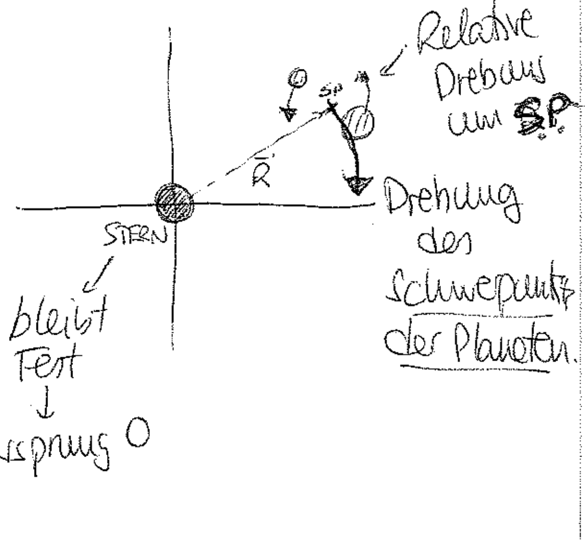
$$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = M(\vec{R} - \vec{R}) = 0 \longrightarrow \overset{\shortparallel}{0}$$

Also
$$\boxed{\vec{L} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}'}$$

Drehimpuls des Schwerpunktes bezogen auf dem Ursprung 0

Gesamtdrehimpuls der Teilchen bezogen auf das Massenzentrum.

z.B. Wir haben ein Stern und 2 Planeten



- Suchen wir nun die Energie des Systems.

Die <u>gesamte kinetische Energie</u> ist

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

- Für konservative Kräfte können wir eine <u>potentielle Energie</u> $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ (die nun eine Funktion aller $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ ist) solch

daß $\quad \vec{F}_i^{(\text{KONS})} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

(<u>Bemerkung</u>: $\vec{\nabla}_i \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}_i}$)

- Dann können wir ~~wie~~ wie auf S. 30 machen:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{KONS}} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{dV}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Also $\quad \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$

Wir definieren die <u>Gesamtenergie des Systems</u> als

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) = T + V$$

und damit $\boxed{\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i} \Longrightarrow$ Energiesatz

- Wie auf S. 31 $\quad E = \text{konst} \quad$ wenn $\quad \vec{F}_i^{(\text{diss})} = 0$ für alle $i$.

- Wir haben schon erwähnt, daß auf einem Teilchen $i$ äußere ($\vec{F}_i^{(ex)}$) und innere ($\vec{F}_{ij}$) Kräfte wirken. Nehmen wir nun an, daß alle diese Kräfte konservative sind. Außerdem werden wir annehmen, daß alle innere Kräfte $\vec{F}_{ij}$ Zentralkräfte sind.

· Das heißt, daß assoziiert mit $\vec{F}_{ij}$ gibt es ein Potential $V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ (S. 35).

(Schreibweise $\vec{r}_i - \vec{r}_j \equiv \vec{r}_{ij}$)

Dann: $$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_j) \overset{\text{actio = reactio}}{=} \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) =$$

$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\vec{\nabla}_{ij} V_{ij}$ (wobei $\vec{\nabla}_{ij} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}}$)

$$= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{ij} V_{ij} \right)$$

Für die äußere Kräfte:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ex)} \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\sum_i \vec{\nabla}_i V_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i V_i\right)$$

Dann $$\frac{d}{dt} T = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(ex)} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \sum_{ij=1}^{n} \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i V_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}\right)$$

Also $$\frac{d}{dt}\left(T + \sum_{i=1}^{n} V_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}\right) = 0$$

· Wir können also die Gesamtenergie so schreiben

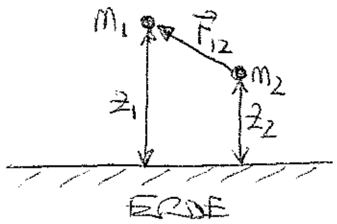
$$\boxed{E = T + \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}}$$

Gesamte kinetische Energie

Äußeres Potential

Innere Wechselwirkungen zwischen den Teilchen des Systems

* Beispiel:




- Wir betrachten 2 Massenpunkten $m_1, m_2$ mit Koordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$
- Diese 2 Massen fühlen:
  - * Schwerkraft der Erde $\begin{cases} V_1 = m_1 g z_1 \\ V_2 = m_2 g z_2 \end{cases}$
  - * Schwerkraft zwischeneinander: $V_{12} = -G \dfrac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|} = V_{21}$

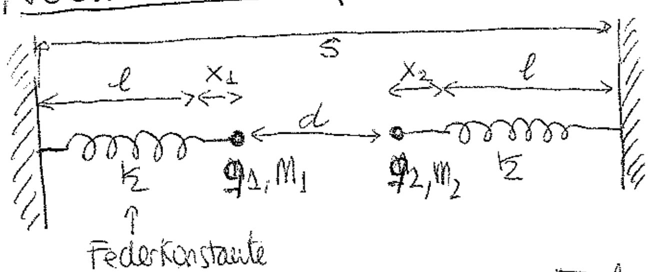
* Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$

* Die gesamte Energie des Systems ist also

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|}$$

- Noch ein Beispiel




- Wir haben 2 Ladungen $q_1$ und $q_2$ wie in der Abbildung (mit Massen $m_1, m_2$)
- Die 2 Ladungen fühlen 2 verschiedene Kräfte
  - Federkraft $\Rightarrow$ Das ergibt ein Potential $V_1 = \frac{1}{2} k x_1^2$, $V_2 = \frac{1}{2} k x_2^2$
  - Coulombkraft $\Rightarrow V_{21} = V_{12} = \underbrace{\gamma}_{\text{Konstante}} \dfrac{q_1 q_2}{d} = \gamma \dfrac{q_1 q_2}{(s - 2\ell - x_1 - x_2)}$

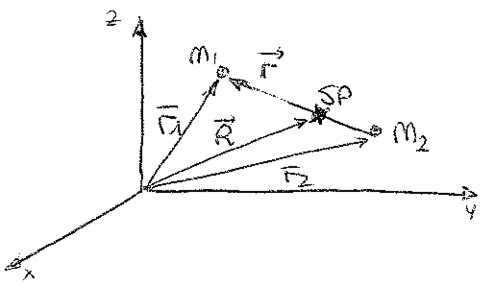
- Die Bewegung findet nur entlang die x-Achse statt. Also

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

- Also $E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \gamma \dfrac{q_1 q_2}{(s - 2\ell - x_1 - x_2)}$

## • Zwei-Teilchen-Systeme

- Das einfachste Mehrteilchensystem ist natürlich das 2-Teilchen-System. 2-Teilchen Systeme tauchen sehr oft in der Physik auf, und es ist daher wichtig, die sorgfältig zu studieren.
- Wir haben also 2 Teilchen $m_1$ und $m_2$ mit Ortsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.




- Aus der allgemeinen Definition von Schwerpunkt (S. 37)

$$\vec{R} = \frac{1}{(m_1+m_2)}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)$$

- Wir führen nun die sogen. Relativkoordinate

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

- Damit können wir $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ so schreiben:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \text{wobei } M = m_1+m_2 \text{ die Gesamtmasse ist}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

- Die Bewegung des Schwerpunktes wird vom Schwerpunktsatz (S. 40) gegeben: $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ex)}$ ← gesamte äußere Kräfte

- Für die Relativkoordinate:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2$$

Aber aus der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}}{m_1}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \frac{\vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21}}{m_2} \overset{\text{actio = reactio}}{=} \frac{\vec{F}_2^{ext} - \vec{F}_{12}}{m_2}$$

Also

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_1^{ex}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{ex}}{m_2} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

* Wir führen nun die wichtige Idee von reduzierte Masse ein.

Die reduzierte Masse $\mu$ ist so definiert:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \longrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

(Bemerkung: wenn $m_1 = m_2 = m \Rightarrow \mu = m/2$

wenn $m_1 << m_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \simeq \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$ )

· Dann $\quad \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1^{ex} - \frac{1}{m_2} \vec{F}_2^{ex} + \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12}$

· Wenn es keine äußere Kraft gibt, $\vec{F}_i^{(ex)} = 0$ (abgeschlossenes System)

dann ist das Problem besonders einfach, da:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \ddot{\vec{r}} &= \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12} \end{aligned}\right\}$$ die Gleichungen für den Schwerpunkt und die Relativkoordinate sind entkoppelt

* Die Bewegung des Schwerpunktes ist sehr einfach

$$\ddot{\vec{R}} = 0 \longrightarrow \dot{\vec{R}} = \text{KONSTANT}$$

· Die Bewegungsgleichung der Relativkoordinate ist besonders interessant: $\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}}$

Das ist die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes mit Masse $\mu$ und Koordinate $\vec{r}$, der die Kraft $\vec{F}_{12}$ erfährt.

· Wir haben also <u>eine komplizierten 2-Teilchen Problem in einem einfachen Problem eines Teilchens umgewandelt.</u>

* Gucken wir nun die Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right]^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}\right)\dot{\vec{r}}^2 \Rightarrow$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{T_S} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2}_{T_R}$$

$T_R$ → Kinetische Energie assoziiert mit der Relativbewegung

$T_S$ ← Kinetische Energies des Schwerpunkten

* Nehmen wir nun an, daß alle Kräfte konservativ sind.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_1 V_{12} \quad ; \quad V_{12} = V_{21}$$

Aus S. 113 die gesamte potentielle Energie (ohne äußere Kräfte)

ist: $V(\vec{r}) = V_{12}(\vec{r})$ die hängt nur von $\vec{r}$ ab

* Also, ohne äußere Kräfte, wird die gesamtenergie in 2 Teilen zerlegt

$$\boxed{E = E_S + E_R \qquad E_R = T_R + V_{12} \qquad E_S = T_S}$$

* Etwas ähnliches passiert mit dem Drehimpuls. Auf S. 111 haben wir gezeigt, daß: $\vec{L} = M\vec{R}\times\dot{\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}'$

wobei $\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{R}$. Aber:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \dot{\vec{r}}_i{}' = \sum_i m_i \left(\frac{\mu}{m_i}\right)^2 \vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \mu^2\left(\sum_i \frac{1}{m_i}\right)\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \mu\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

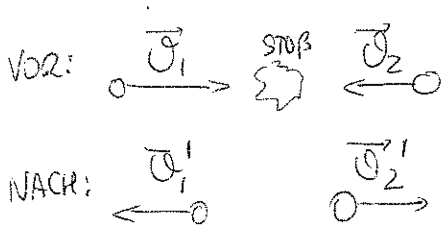
- Also der Gesamtdrehimpuls wird auch in 2 Teilen zerlegt:

$$\boxed{\vec{L} = \underbrace{\vec{L}_S}_{M\vec{R}\times\dot{\vec{R}}} + \underbrace{\vec{L}_R}_{\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}}}$$

- Zusammengefaßt: wenn es keine äußere Kräfte gibt, das 2-Teilchen System kann in 2 entkoppelten Bewegungen zerlegt: eine triviale geradlinige ($\ddot{\vec{R}}=0$) Bewegung für den Schwerpunkt, und eine Relativbewegung. Die Relativbewegung ist die Bewegung eines Teilchens mit Masse $\mu$, Koordinate $\vec{r}$, und mit einer einwirkenden Kraft $\vec{F}_{12}$ ( $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}$ ).

• ZWEIKÖRPERSTOß

• Ein wichtiges Problem der 2-Körperphysik ist das Problem des 2-Körperstoßes. 2 Körper mit Massen $m_1$ und $m_2$ gehen zueinander mit Anfangsgeschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Wir wollen die Endgeschwindigkeiten $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$ nach dem Stoß bestimmen.




• Wir werden erstmals ein Stoß in einer Dimension studieren (also wie in der Abbildung da oben).

• In einem Stoß wirken nur innere Kräfte (die den Stoß bestimmen). Aus dem Impulserhaltungssatz (S. 39) wissen wir also, daß der Gesamtimpuls erhalten wird.

Vor dem Stoß $\longrightarrow$ $P = m_1 v_1 + m_2 v_2$

Nach dem Stoß $\longrightarrow$ $P = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

(Bemerkung: hier schreibe ich $\vec{P}$ nicht, weil die Bewegung nur auf eine Gerade stattfindet)

Also $\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'}$

• Ein Stoß ist elastisch wenn die kinetische Energie $T$ erhaltet wird. Das ist nicht immer der Fall (eigentlich typischerweise ist nicht der Fall). Wenn $T$ nicht erhaltet wird, dann spricht man um inelastischen Stöße

* Wir werden erstmal die elastische Stöße betrachten.
Die kinetische Energie muß also erhaltet werden:

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2}$$

Also wir haben nun 2 Gleichungen für 2 Unbekannte.
Bevor wir die Lösung schreiben, gucken wir, wie die relative Geschwindigkeit $v_2 - v_1$ sich verhaltet.

Aus der 2 Gleichungen da oben:

$$m_1 (v_1' - v_1) = -m_2 (v_2' - v_2)$$
$$m_1 (v_1'^2 - v_1^2) = -m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

wir dividieren die 2 Gleichungen $\Big\} \longrightarrow v_1' + v_1 = v_2 + v_2'$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_2 - v_1 = -(v_2' - v_1')}$$

Also, die relative Geschwindigkeit wird in Betrag erhaltet

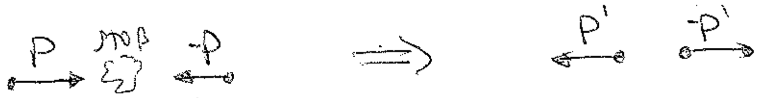
$$|v_2 - v_1| = |v_2' - v_1'|$$

aber das Vorzeichnen ändert sich.
Wir können dies Ergebnis ganz einfach mit Hilfe des Schwerpunktssystems verstehen. Seien $u_1$ und $u_2$ die Anfangsgeschwindigkeiten im Schwerpunktsystem, und $u_1'$ und $u_2'$ die Endgeschwindigkeiten.

Per Definitionem, im Schwerpunktsystem bleibt der Schwerpunkt am Koordinatenursprung, und damit ist der Gesamtimpuls Null:

$$p = \underbrace{m_1 u_1}_{p_1} + \underbrace{m_2 u_2}_{p_2} = \underbrace{m_1 u_1'}_{p_1'} + \underbrace{m_2 u_2'}_{p_2'} = 0$$

Also $p_2 = -p_1 = -p$ und $p_1' = -p_2' = -p'$

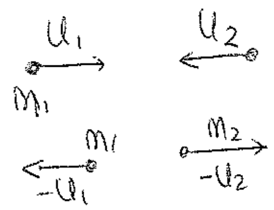



Da der Stoß elastisch ist: (Bemerkung: $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$)

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

also $p^2 = p'^2$

Also $p' = -p \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1' = -u_1 \\ u_2' = -u_2 \end{array}\right\}$




und daher $u_2 - u_1 = -(u_2' - u_1')$

Die relative Geschwindigkeit ist das gleiche im Labor- und Schwerpunktsystem (da $v_j = u_j + \dot{\vec{R}}$), also

$$v_2 - v_1 = -(v_2' - v_1')$$

wie vorher.

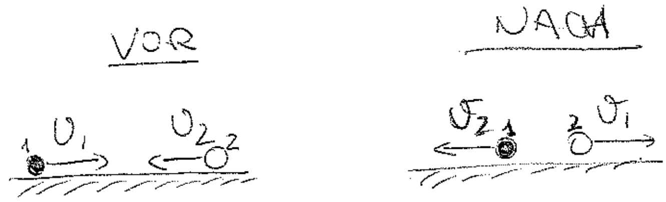
Wir kehren nun zum Laborsystem:

$$\left.\begin{aligned} m_1(v_1'-v_1) &= -m_2(v_2'-v_2) \\ m_1(v_1'^2-v_1^2) &= -m_2(v_2'^2-v_2^2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} m_1 v_1' + m_2 v_2' &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ v_1' - v_2' &= -v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Dann:
$$\boxed{\begin{aligned} v_1' &= \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right) v_2 \\ v_2' &= \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right) v_1 - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) v_2 \end{aligned}}$$

- Wenn $m_1 = m_2$ (identische Teilchen)

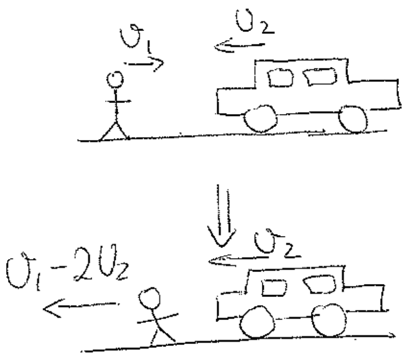
$$\left.\begin{aligned} v_1' &= v_2 \\ v_2' &= v_1 \end{aligned}\right\} \text{ also } \Rightarrow$$




Also die Teilchen tauschen die Geschwindigkeiten aus.
(versuch es zB mit Billiardkugeln!)

- Wenn $m_1 \ll m_2$

$$\left.\begin{aligned} v_1' &\simeq -v_1 + 2v_2 \\ v_2' &\simeq v_2 \end{aligned}\right\}$$




Masse (Mann) $\ll$ Masse (Auto)

(z.B. ein Auto mit 40 km/h würde ein Mann in Ruhe ($v_1=0$) eine Geschwindigkeit von 80 km/h geben. Also am besten aufpassen beim Straßendurchqueren!)

- Wenn der Stoß nicht elastisch ist, dann wird die kinetische Energie nicht erhaltet

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + Q$$

Änderung der kinetischen Energie

- Wenn

$Q>0 \rightarrow T'<T \Rightarrow$ inelastische endotherme Stöße
kinetische Energie wird in innere Energie der Stoßpartner verwandelt (oder zB in Wärme)

$Q<0 \longrightarrow T'>T \Rightarrow$ inelastische exotherme Stöße
innere Energie wird in kinetische Energie verwandelt.

- In Schwerpunktsystem:
  - Aus S. 51: $p_1 = -p_2$ , $p_1' = -p_2'$

  aber nun: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_1'^2 + Q$

  - Wir benutzen die Definition von reduzierter Masse:

$$\boxed{\frac{1}{2\mu}p_1^2 = \frac{1}{2\mu}p_1'^2 + Q}$$

Wenn wir den Inelastischerkoeffizient $Q$ kennen können wir auch $p_1'$ und $p_2'$ bestimmen.

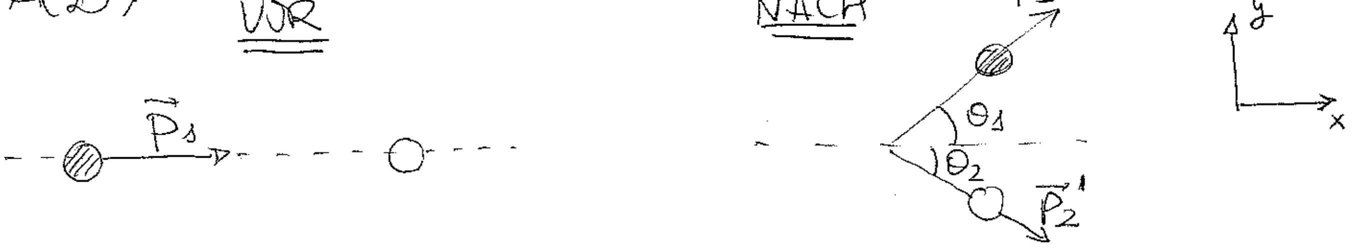
# * Dreidimensionale Stöße

• Wir betrachten noch mal den Stoß zwischen $m_1$ und $m_2$ aber diesmal die Bewegung kann in 3D stattfinden.

• Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall

$\vec{v}_2 = 0$ , $\vec{v}_1 = v_1 \vec{e}_x$

Also;




* Da, noch mal, es keine äußere Kräfte gibt, dann soll der Impuls erhaltet werden

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$$

(Bemerkung: Deswegen findet der Stoß auf einer Ebene statt. Also 2 Vektoren, seien $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_1{}'$, definieren eine Ebene. Da $\vec{p}_2{}' = \vec{p}_1 - \vec{p}_1{}'$, $\vec{p}_2$ liegt auch auf dieselber Ebene. Wir nehmen diese Ebene als die xy-Ebene ohne Verlust der Allgemeinheit)

$(p_j \equiv |\vec{p}_j|)$

• $\vec{p}_1{}' = (p_1' \cos\theta_1)\,\vec{e}_x + (p_1' \sin\theta_1)\,\vec{e}_y$

$\vec{p}_2{}' = (p_2' \cos\theta_2)\,\vec{e}_x - (p_2' \sin\theta_2)\,\vec{e}_y$

$\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$

(Die $\vec{e}_z$-Komponent ist immer Null, da die Bewegung auf der xy-Ebene stattfindet)

• Also

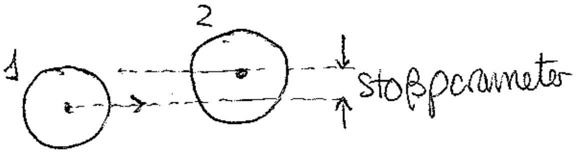
$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &= p_1' \cos\theta_1 + p_2' \cos\theta_2 \quad \leftarrow \text{x-Richtung} \\ 0 &= p_1' \sin\theta_1 - p_2' \sin\theta_2 \quad \leftarrow \text{y-Richtung} \end{aligned}}$$

• Wir betrachten den Stoß als elastisch, also

$$\boxed{\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}}$$

* Wir haben also 3 Gleichungen für 4 Unbekannten ($p_1', p_2', \theta_1, \theta_2$).
Sagen wir, daß man $\theta_1$ kennt (wir haben $\theta_1$ ganz präzis mit einem Detektor gemessen).

(Bemerkung: Eigentlich hängt $\theta_1$ vom sogen. Stoßparameter ab. Die Idee sollte einfach zu verstehen, für alle die Leute die mal Billiard gespielt haben. Ich kann die Richtung der ausgegangene Kugel (also $\theta_1$ oder $\theta_2$) wenn ich ein bisschen "an der Seite" der Kugel stoße. Diese Idee von "an der Seite" ist genau der Stoßparameter! Wir betrachten hier den Stoßparameter nicht, und deswegen ist $\theta_1$ nicht bestimmt.)




• Also, nun haben wir 3 Gleichungen, und wir haben $\theta_1$ gemessen. Ich habe also 3 Unbekannten übrig, die ich nun bestimmen kann.

• Ich werde nun nach $p_1'$ suchen:

* Ich weiß, daß $\vec{p}_2' = \vec{p}_1 - \vec{p}_1'$. Also

$$p_2'^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_1')^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2\,\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1' \overset{\text{Definition vom Skalarprod. (S. 4)}}{=} p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1'\cos\theta_1$$

* Andererseits, aus der Energieerhaltung:

$$p_2'^2 = \frac{m_2}{m_1}\left(p_1^2 - p_1'^2\right)$$

Also: $$p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1'\cos\theta_1 = \frac{m_2}{m_1}\left(p_1^2 - p_1'^2\right)$$

* Ich haben nun eine Gleichung für $p_1'$ als Funktion von $p_1$ und $\theta_1$. Diese Gleichung läßt sich umschreiben:

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)p_1'^2-(2p_1\cos\theta_1)p_1'+\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)p_1^2$$

(<u>Bemerkung</u>: dies ist eine algebraische Gleichung 2. Ordnung, der Form $ax^2+bx+c=0$. Ich erinnere euch, daß so eine Gleichung hat 2 Lösungen der Form $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)

* Die Gleichung dadben hat also 2 Lösungen:

$$\boxed{\frac{p_1'}{p_1}=\left[\frac{m_1}{m_1+m_2}\right]\cos\theta_1\pm\sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\theta_1+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)}}$$

* Mit ähnlichen Rechnungen kann ich $p_2'$ und $\theta_2$ ebenfalls rechnen.
* Wir haben nun die Mathematik gemacht. Nun müssen wir diese Mathematik interpretieren, bzw. wir müssen die Physik verstehen!
* Wir werden nun annehmen, daß $m_1 \geq m_2$. Wir können nun $p_1'/p_1$ so umschreiben:

$$\boxed{\frac{p_1'}{p_1}=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\left\{\cos\theta_1\pm\sqrt{\cos^2\theta_1-\left(1-\frac{m_2^2}{m_1^2}\right)}\right\}}$$

* Wir haben hier den Würzel:

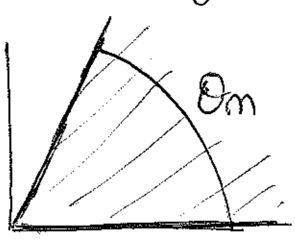
$$\sqrt{\cos^2\theta_1-(1-m_2^2/m_1^2)}$$

* Wir wissen, daß wenn $\alpha = \sqrt{\beta}$, dann $\beta = \alpha^2$.
Wenn $\alpha$ ~~Reel~~ ist ($\alpha \in \mathbb{R}$), dann $\beta \geq 0$
(Bemerkung: wenn $\alpha$ Komplex ist, dann $\beta$ kann negativ sein.
Wir werden auch Komplexe Zahlen in dieser Vorlesungsreihe studieren
aber noch nicht.)

* Also wenn ich will, daß $p_1'/p_1$ ~~Reel~~ bleibt, und das
will ich (sonst wäre es ein Unsinn!), dann muss es sein, daß

$$\cos^2\theta_1 \geq 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

* Der Winkel $\theta_1$ ist also begrenzt, $\theta_1$ kann nicht alle
beliebige Werten annehmen, wenn mein Problem physikalisch bleiben
muß. Das ergibt einen maximalen Winkel $\theta_m$ solch daß




$$\boxed{\cos^2\theta_m = 1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \qquad 0 < \theta_m < \pi/2}$$

Der Winkel $\theta_1$ muß erfüllen:

$$\boxed{0 \leq \theta_1 \leq \theta_m}$$

* Wenn $m_2 \ll m_1$, $\theta_m$ ist sehr klein. Das ist natürlich
logisch, weil wenn $m_2 \ll m_1$, dann $m_2$ kann nicht $m_1$
so viel ablenken!

* Aus der Lösung um $p_1'/p_1$ sehen wir, daß es eigentlich
2 verschiedenen Lösungen gibt (wegen der $\pm$). Gucken
wir es für den Fall $\theta_1 = 0$:

* Die 2 Lösungen für $\theta_1 = 0$ sind:
  * $p_1' = p_1 \Rightarrow$ kein Stoß ($m_1$ bleibt unbeeinflüßt)
  * $p_1' = p_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$

Für die 2. Lösung, wenn ich nach $\theta_2$ und $p_2'$ suche, bekomme ich: $\theta_2 = 0$

$$p_2'/p_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$


Die Bewegung ist also 1D, und allerdings bekommen wir die 1D Lösungen von S. 52 (für $v_2 = 0$):

$$v_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

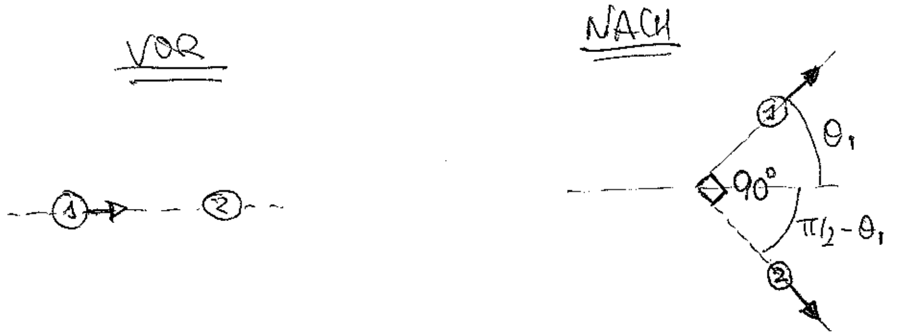
$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

* Gucken wir nun was passiert wenn $m_1 = m_2$. Dann

$$\frac{p_1'}{p_1} = \cos\theta_1 \,, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \,, \quad \frac{p_2'}{p_1} = \sin\theta_1$$

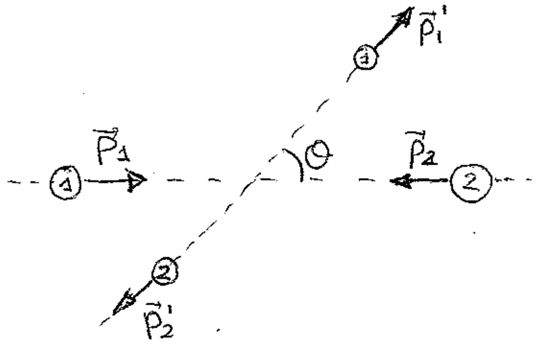
und $\cos^2\theta_m = 0 \rightarrow \theta_m = \pi/2$, also alle $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ sind möglich.

Wir haben also




(Bemerkung: Mit Billiardkugeln passiert so was. Versuch es!)

* Bisher haben wir immer im Laborsystem gearbeitet. Wie sieht es aus im Schwerpunktsystem? Eigentlich sehr einfach.




* Im Schwerpunktsystem ist per Definitionem der Gesamtimpuls Null. Also:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$$

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' = \vec{p}\,'$$

Für elastische Stöße: $p = p'$

Nur $\Theta$ bleibt unbekannt (wie schon erwähnt, $\Theta$ hängt vom Stoßparameter ab).

· Die Beschreibung im Schwerpunktsystem ist also extrem einfach. Deswegen ist die Beschreibung im Schwerpunktsystem so nützlich und wichtig!

---

* Wir sind damit (vorläufig) mit unserer Einführung in die Newton-Mechanik fertig. Später in dieser Vorlesungsreihe werden wir viel mehr über 2-Teilchensysteme und im allgemeinen Newton-Mechanik lernen.