Reihen

- Sei eine Reihe von Gliedern: $\{u_1, \dots, u_N\}$, wir sind nun an der Summe $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ interessiert.

Summen dieser Form spielen in der theoretischen Physik eine wichtige Rolle. Das ist besonders so im Fall der sogen. Taylor-Entwicklung, wie wir bald sehen werden.

- Ein wichtiges Beispiel von Reihen ist die sogen. geometrische Reihe:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} r^{n-1}$$

Wir werden nun diese Reihen addieren:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} r^{n-1} = \left(\frac{1-r}{1-r}\right) \sum_{n=1}^{N} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}\left\{ \sum_{n=1}^{N} r^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} r^{n} \right\}$$

$$= \frac{1}{1-r}\left\{ 1 + \sum_{n=2}^{N} r^{n-1} - \sum_{n=1}^{N-1} r^{n} - r^N \right\} \overset{n'=n-1}{=}$$

$$= \frac{1}{1-r}\left\{ 1 + \cancel{\sum_{n'=1}^{N-1} r^{n'}} - \cancel{\sum_{n=1}^{N-1} r^{n}} - r^N \right\}$$

Also $S_N = \dfrac{1-r^N}{1-r}$ ← wir haben die Reihe addiert

- Mehrmals wollen wir eine unendliche Reihe addiert

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{, also nun } N \to \infty$$

$$S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N$$

- Die unendlichen Reihen können konvergent oder divergent sein. Eine konvergente Reihe ergibt eine endliche Summe, eine divergente Reihe im Gegenteil eine unendliche Summe.

Zum Beispiel, die vorherige geometrische Summe

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} r^{n-1} \quad \text{ist divergent für } |r| \geq 1.$$

Für $|r| < 1$: $\quad S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \dfrac{1-r^N}{1-r} = \dfrac{1}{1-r}$

Also $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}}$ für $|r|<1$

• <u>Bemerkung</u>: Es ist natürlich wichtig zu wissen, wann eine Reihe

konvergent oder divergent ist. Das ist nicht immer einfach zu sagen.

Es gibt verschiedenen Konvergenz-Tests, aber die werden wir hier

nicht diskutieren. Für mehreren Einzelheiten sieh z.B. das

Buch von Arfken: "Mathematical methods for physicists".

• Es gibt mehreren wichtigen Reihen. Vielleicht einige der wichtigsten

sind die <u>arithmetischen Reihen</u>.

Die einfachste aller arithmetischen Reihen ist

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = N \quad \Big(\text{also } \underbrace{1+1+\dots+1+1}_{N \text{ Mal}} = N\Big)$$

Aus dieser Reihe können wir allen möglichen arithmetischen

Reihen der Form $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^s$ (mit $s = 1, 2, 3, \dots$) addieren.

z.B.:

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n = ?$ $\Rightarrow$ Hier werden wir ein nützliches Trick anwenden,

und zwar: wenn $u_n = f(n) - f(n-1)$ für eine gewisse

Funktion f, dann $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = f(N) - f(0)$

Sei also $u_n = n^2 - (n-1)^2$, dann

$$\sum_{n=1}^{N} \left[n^2 - (n-1)^2 \right] = N^2 - 0^2 = N^2$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=1}^{N} (2n-1) = 2 \sum_{n=1}^{N} n - \sum_{n=1}^{N} 1 = 2 \sum_{n=1}^{N} n - N$$

Also $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2}(N^2+N) \longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}}$

<u>Bemerkung</u>: diese Reihen divergieren natürlich (für $N \to \infty$).

- Genauso können wir z.B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2$ addieren:

$$\sum_{n=1}^{N} \left[n^3 - (n-1)^3 \right] = N^3$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=1}^{N} (3n^2 - 3n + 1) = 3 \sum_{n=1}^{N} n^2 - 3 \sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{N} n^2 - \frac{3N(N+1)}{2} + N = N^3 \longrightarrow \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{3} \left\{ N^3 + \frac{3N(N+1)}{2} - N \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)}$$

und so weiter für $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^3, \sum_{n=1}^{N} n^4, \ldots$

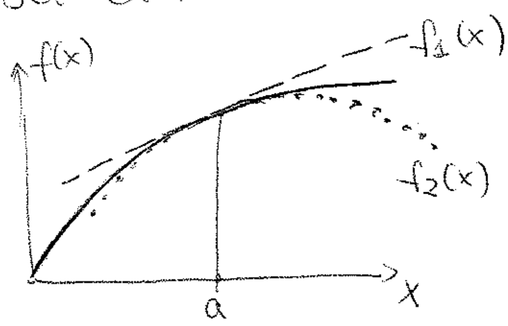
- Wir werden hier nicht die gesamte Theorie der Reihen diskutieren, das würde uns zu viel ablenken.

Wir werden hier die Idee von <u>Taylor-Entwicklung</u> diskutieren, die eine extrem wichtige Rolle in der theoretischen Physik spielt.

Die Taylor-Entwicklung

Die Taylor-Entwicklung taucht eigentlich fast überall auf. Wir werden nun die Idee vorstellen.

Sei eine Funktion $f(x)$. Wir wollen diese Funktion in der Nähe eines Punktes $x=a$ untersuchen.



Eine erste Näherung in der Nähe von $x=a$ wäre

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) = f_1(x)$$

also, wir substituieren $f(x)$ durch eine Gerade, und die Steigung der Gerade ist die Ableitung von $f(x)$ in a, also $f'(a)$.

In der Abbildung sehen wir dass diese Näherung nur gut in der sehr engen Nähe ~~von~~ $x=a$ ist.

Wir können es besser machen, und zwar mit einer parabolischen Näherung:

$$f(x) \simeq f_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + g(a)(x-a)^2$$

Wir können $g(a)$ sehr einfach bestimmen:

$$f'(x) = f'(a) + 2g(a)(x-a)$$

$$f''(a) = 2g(a) \longrightarrow g(a) = \frac{1}{2} f''(a)$$

also eine beste Näherung wäre:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 = f_2(x)$$

In der Abbildung sehen wir nun, dass die Näherung in der Nähe von $x=a$ nun besser ist.

- Im allgemeinen können wir die Näherung besser und besser machen, und zwar mit Hilfe einer Potenzreihe:

$$f(x) = f(a) + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + c_4 (x-a)^4 + \dots$$

$$f'(x) = 0 + c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + 4c_4 (x-a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 0 + 0 + 2c_2 + 3\cdot 2\, c_3 (x-a) + 4\cdot 3\, c_4 (x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 3\cdot 2\, c_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4 (x-a) + \dots$$

$$f^{IV}(x) = 0 + 0 + 0 + 0 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot c_4 + \dots$$

Dann
$$c_1 = f'(a)$$
$$c_2 = f''(a)/2$$
$$c_3 = f'''(a)/3\cdot 2 = \frac{1}{3!} f'''(a)$$
$$c_4 = f^{IV}(a)/4\cdot 3\cdot 2 = \frac{1}{4!} f^{IV}(a)$$
$$\vdots$$
$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

Also
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x-a)^n}$$

Das ist die Taylor-Entwicklung (oder Taylor-Reihe) der Funktion $f(x)$ um $x = a$.

Bemerkung: (ich erinnere euch, dass $0! = 1$ und $f^{(0)}(a) = f(a)$)

- Typischerweise addieren wir nicht bis ∞, sondern:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \underbrace{\mathcal{O}\left[(x-a)^{N+1}\right]}_{\text{Fehler von Ordnung } (x-a)^{N+1}}}$$

- Nun sehen wir, warum ist die Taylor-Entwicklung so wichtig. Wir können damit eine beliebige Funktion als ein Polynom annähern. (eigentlich f muss hinreichend glatt, also ∞ differenzierbar)

• Wir werden nun einige Beispiele sehen.

Ein wichtiges Beispiel ist die exponentielle Funktion:

$$f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x \longrightarrow f''(x)=e^x \longrightarrow f^{(n)}(x)=e^x$$

Also Wir entwickeln um $x=0$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^0x^n \Longrightarrow \boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n}$$

• Gucken wir nun $\cos(x)$ um $x=0$:

$$f(x)=\cos x \longrightarrow f'(x)=-\sin x \longrightarrow f''(x)=-\cos x \longrightarrow f'''(x)=\sin x \rightarrow \dots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x=0)\,x^n=\cos(0)-\sin(0)x-\frac{1}{2}\cos(0)x^2+\frac{1}{3!}\sin(0)x^3+\dots$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots=\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{1}{(2n')!}(-1)^{n'}x^{2n'}$$

also $$\boxed{\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}$$

• Gucken wir nun $\sin(x)$ um $x=0$:

$$f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x \longrightarrow f''(x)=-\sin x \longrightarrow f'''(x)=-\cos x \rightarrow \dots$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x=0)\,x^n=\sin(0)+\cos(0)x-\frac{1}{2}\sin(0)x^2-\frac{1}{3!}\cos(0)x^3+\dots$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\dots=\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n'}}{(2n'+1)!}x^{2n'+1}$$

also $$\boxed{\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

- Nun können wir eine wichtige Formel der komplexen Zahlen herleiten.

Wie für reelle Zahlen gilt auch für $z \in \mathbb{C}$

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n}$$

(Bemerkung: die Entwicklungen für komplexen Zahlen sind ein bisschen trickier, aber das werden wir hier nicht diskutieren.)

Sei nun $z = i\theta$ mit $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\theta)^{n} = 1 + i\theta + \frac{1}{2}(i\theta)^{2} + \frac{1}{3!}(i\theta)^{3} + \frac{1}{4!}(i\theta)^{4} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^{2} - i\frac{1}{3!}\theta^{3} + \frac{1}{4}\theta^{4} \dots$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\theta^{2} + \frac{1}{4}\theta^{4} + \dots\right] + i\left[\theta - \frac{1}{3!}\theta^{3} + \frac{1}{5!}\theta^{5} + \dots\right]$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

→ Das ist die Euler-Formel, und das ist extrem wichtig bei der Behandlung von komplexen Zahlen. (Bemerkung: $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$)

- Noch ein Beispiel: $f(x) = \ln(1+x)$ um $x = 0$

$$f'(x) = (1+x)^{-1} \rightarrow f''(x) = -(1+x)^{-2} \rightarrow f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^{n} = \underbrace{\ln(1)}_{0} + x - \frac{1}{2}x^{2} + \frac{1}{3!}2x^{3} - \frac{1}{4!}3!x^{4} + \dots$$

$$= x - \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{3}}{3} - \frac{x^{4}}{4} + \frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{6}}{6} + \dots$$

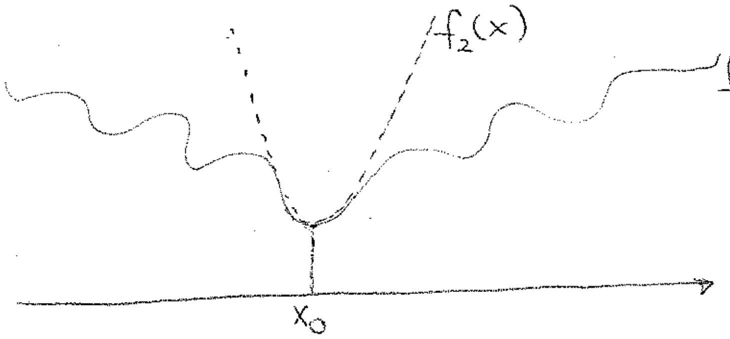
Also $$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n}}{n!}}$$

→ Das ist ein Beispiel eine alternierte Reihe (also $+, -, +, -, +, -, +, - \dots$)

z.B.: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$ (alternierte harmonische Reihe)

· Eine sehr nützliche Anwendung der Taylor-Entwicklung in der Physik ist die sogen. harmonische Näherung um ein Minimum eines Potentials.

Sei $V(x)$ eine potentielle Energie. Sei $x = x_0$ ein Minimum des Potentials, also $V'(x_0) = 0$, $V''(x_0) > 0$.



Dann:

$$V(x) \simeq V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + V''(x_0)\frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Dann, in der Nähe von $x = x_0$:

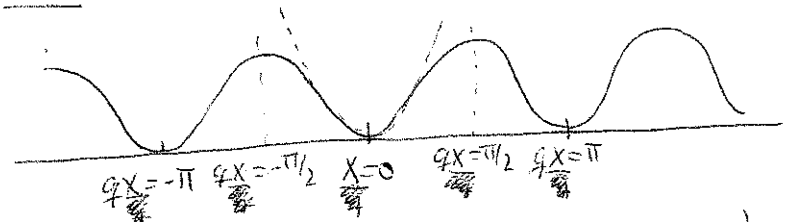
$$V(x) \simeq \underbrace{V(x_0)}_{\text{KONSTANTE}} + \underbrace{\frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2}_{\text{Harmonischer Oszillator}} + \mathcal{O}\left((x - x_0)^3\right)$$

Also in der Nähe eines Minimums, können wir das Potential als ein harmonischer Oszillator annähern.

z.B.: Sei ein Potential $V(x) = \sin^2(qx)$ um $x = 0$ Minimum

$$V'(x) = 2q \sin qx \cos qx = q \sin 2qx$$

$$V''(x) = 2q^2 \cos 2qx$$



Also $V(x) \cong V(0) + V'(0)x + \frac{1}{2}V''(0)x^2$

$$= q^2 x^2$$

Ich erinnere euch das für eine Federkonstante k, das Potential (S.33) des assoziierten harmonischen Oszillators $\frac{1}{2}kx^2$ ist. Also in der Nähe um $x = 0$, $V(x)$ ist wie ein Federpotential mit $k = 2q^2$

* Wir können eine ähnliche Näherung in der Nähe eines Maximums machen; z.B. $\sin^2(qx)$ um $qx = \pi/2$

$$\left.\begin{aligned} V(\pi/2q) &= 1 \\ V'(\pi/2q) &= 0 \\ V''(\pi/2q) &= -2q^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow V(x) \simeq 1 - q^2\left(x - \frac{\pi}{2q}\right)^2 \Rightarrow$$

Das Potential ist nun eine invertierte Parabola.

Also in der Nähe des Minimums:

$$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) = -2q^2 x$$

d.h. dass $x=0$ ist ein stabiler Punkt gegen kleinen Abweichungen.
Es ist wie ein Feder (je größer die Ablenkung nach rechts, desto größer die Kraft nach links) (S. 25)

Im Gegenteil $x = \pi/2q$ ist ein instabiler Punkt, das

$$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) = 2q^2 x$$

Je größer die Abweichung nach sagen wir rechts, desto größer die Kraft nach rechts. Also, bald sind wir nicht mehr in der Nähe um $x = \frac{\pi}{2q}$ (deswegen ist der Punkt instabil).

* Wir werden später noch mal diese wichtige Idee um Stabilität und Instabilität genauer sehen.

Die Stabilitätsanalyse ist eine der wichtigsten Anwendungen der Taylorentwicklung in der Physik

* TAYLOR-ENTWICKLUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Bisher haben wir nur die Taylor-Entwicklung von Funktionen einer Variable ($f(x)$) gesehen. Wir werden nun die Idee von Taylor-Entwicklung für Funktionen mehreren Variablen verallgemeinern.

+ Sei eine Funktion $f(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, also eine Funktion von N Variablen. Wir wollen diese Funktion in der Nähe von $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})$ entwickeln.

Die Verallgemeinerung ist sehr einfach. Für eine Variable:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n}(x)(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(x-x_0)\frac{d}{dx}\right]^n f$$

wobei die Ableitungen finden an $x=x_0$ statt.

Für N Variablen ist genauso:

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j0})\frac{\partial}{\partial x_j}\right]^n f$$

Wir verallgemeinern die Idee von Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right)$$

(für $N=3$, $\vec{\nabla}$ ist der Nabla-Operator, das wir bisher gesehen haben)

sei $\vec{\epsilon} = \vec{x} - \vec{x}_0$, dann $\sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j0})\frac{\partial}{\partial x_j} = \vec{\epsilon}\cdot\vec{\nabla}$

Also:

$$\boxed{f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\vec{\epsilon}\cdot\vec{\nabla}\right]^n f}$$

Noch mal, alle Ableitungen finden an $\vec{x} = \vec{x}_0$ statt.

Zum Beispiel, sei $f(x,y)$ eine Funktion 2 Variablen x und y
Dann, für eine Entwicklung um $(x,y)=(a,b)$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f =$$ Ableitungen immer in $(x,y)=(a,b)$

$$= f(a,b) +$$
$$+ (x-a)\frac{\partial}{\partial x}f + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}f$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \dots$$

* Sei $(x,y)=(a,b)$ ein Extremum von $f(x,y)$, also

$\frac{\partial f}{\partial x}(x=a, y=b) = 0$, und $\frac{\partial f}{\partial y}(x=a, y=b) = 0$.

Damit, bis zum 2-~~ten~~n Ordnung können wir entwickeln:

$$f(x,y) \cong f(a,b) + \frac{1}{2}\left((x-a),(y-b)\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} (x-a) \\ (y-b) \end{pmatrix}$$

wo wir hier die Matrix-Schreibweise anwenden.

Das ist das Äquivalent der harmonischen Näherung (S. 156) für Funktionen von 2 Variablen.

(- Bemerkung: Diese Matrix ist die sogen. Hesse-Matrix)

Sei $\vec{\epsilon} = (x-a)\vec{e}_x + (y-b)\vec{e}_y$

und $M = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y \\ \partial^2 f/\partial x \partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}$

(Schreibweise von S. 141')

Dann: $\boxed{f(\vec{x}) \cong f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\vec{\epsilon}^T \cdot M \cdot \vec{\epsilon}}$

wobei $\vec{x}_0 \equiv (a,b)$. Wir können das für N-Variablen verallgemeinern.

Für N-Variablen: $M_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ und $\vec{\epsilon} = \sum_j (x_j - x_{j0})\vec{e}_{x_j}$

· Nun können wir die Idee von Stabilitätsanalyse erweitern. Dafür, müssen wir die Matrix M diagonalisieren. Wir machen das für die Funktionen von 2 Variablen.

Die Matrix $M = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}$

hat 2 Eigenwerte $\lambda_{\eta,\xi}$ und 2 entsprechenden Eigenvektoren:

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_\xi &\equiv \cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\eta &\equiv -\sin\theta\, \vec{e}_x + \cos\theta\, \vec{e}_y \end{aligned}\right\}$$ wobei der Winkel θ durch die Diagonalisierung bestimmt wird.

Wenn wir $\vec{\epsilon}$ in den neuen Koordinaten schreiben:

$$\vec{\epsilon} = \xi\, \vec{e}_\xi + \eta\, \vec{e}_\eta \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

dann wird die Matrix in der Diagonalen Form $\begin{pmatrix} \lambda_\xi & 0 \\ 0 & \lambda_\eta \end{pmatrix}$ geschrieben, und damit

$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\vec{\epsilon}^{\,T} \cdot M \cdot \vec{\epsilon}$$

$$= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\xi, \eta)\begin{pmatrix} \lambda_\xi & 0 \\ 0 & \lambda_\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\lambda_\xi \xi^2 + \frac{1}{2}\lambda_\eta \eta^2$$

· Also, entlang der Hauptachsen $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ haben wir nun 2 harmonischen Funktionen $\frac{1}{2}\lambda_\xi \xi^2$ und $\frac{1}{2}\lambda_\eta \eta^2$.

Aus unserer Diskussion der Funktionen einer Variable haben wir gesehen, dass in der Nähe eines ~~[illegible]~~ Extrems eines Potentials $V(x)$:

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x-x_0)^2$$

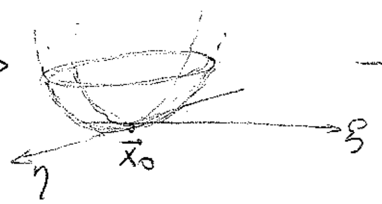
Wir haben dann gesehen, dass wenn $V''(x_0) > 0$ dann $x = x_0$ ist ein stabiler Punkt (also ein Minimum), und wenn

$V''(x_0) < 0 \longrightarrow x = x_0$ ist unstabil.

Für Funktionen 2 Variablen ist es ein bischen komplizierter:

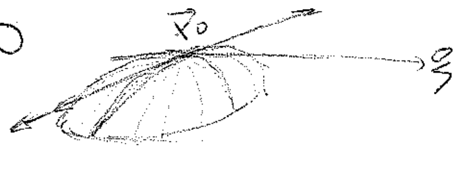
$$V(\vec{x}) \simeq V(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\lambda_\xi \xi^2 + \frac{1}{2}\lambda_\eta \eta^2$$

- Wenn $\lambda_\eta, \lambda_\xi > 0 \longrightarrow$



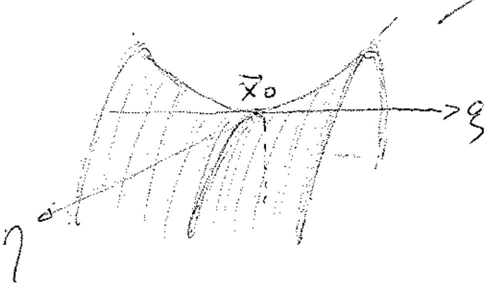
$\longrightarrow$ Der Punkt is stabil (wir haben ein Minimum von V)

- Wenn $\lambda_\eta, \lambda_\xi < 0$



$\longrightarrow$ Der Punkt ist unstabil (wir haben ein Maximum von V)

- Wenn $\lambda_\eta < 0, \lambda_\xi > 0$ oder $\lambda_\eta > 0, \lambda_\xi < 0$



$\longrightarrow$ Der Punkt $\vec{x}_0$ ist ein Sattel-Punkt. $V(\vec{x})$ ist instabil aber nur in einer Richtung

Das ist ein Beispiel von Stabilitätsanalyse in mehreren Dimensionen.

1. Man hat eine Funktion $V(\vec{x})$ in N-Variablen und ein Extrempunkt $\vec{x}_0$, solch daß $\partial_j V(\vec{x} = \vec{x}_0) = 0$ für alle $j = 1 \dots N$.
2. Man rechnet die Matrix M, mit $M_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x} = \vec{x}_0)$
3. Man diagonalisiert $M \to \lambda_1, \dots, \lambda_N \Leftarrow$ Eigenwerte.
4. Sind alle $\lambda_j > 0$? $\to$ Dann Stabilität

* Beispiel

* Sei die Funktion $f(x,y) = xy$
* Diese Funktion hat ein Extremum an $x=y=0$, weil

$$\left.\begin{array}{l} \partial f/\partial x = y \\ \partial f/\partial y = x \end{array}\right\} \xrightarrow[x=y=0]{} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

* Ist dies Extremum ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt?

quellen wir es.

Wir entwickeln bis zum 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

Also: $$f(x,y) \cong \underbrace{f(0,0)}_{0} + \cancel{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}^{0} x + \cancel{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}^{0} y + \frac{1}{2}\cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)}^{0} x^2 + \frac{1}{2}\cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}^{0} y^2 + \cancel{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)}^{1} xy$$

$$= xy = \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{\epsilon}^{\,T} \cdot M \cdot \vec{\epsilon}$$

Wir haben also die Hesse Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Diese Matrix hat Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_\xi = +1 \longrightarrow \vec{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\lambda_\eta = -1 \longrightarrow \vec{e}_\eta = 1/\sqrt{2}\,(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

Also $f(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2$

und damit $\xi = \eta = 0$ ist ein <u>Sattelpunkt</u>.