• Der starre Körper

• 3D Integralen werden in der Physik für mehreren Zwecken benutzt. Eine wichtige Anwendung betrifft die Behandlung von Kontinuerlichen Massenverteilungen. Wir werden das im Rahmen der Theorie des starren Körpers sehen.

• Bisher haben wir die Dynamik des Massenpunkten studiert. Wir haben auch Systemen mehreren Teilchen gesehen. Aber bei einen makroskopischen Festkörper (mit etwa 10^{23} Teilchen/cm^3) wird das Konzept des Massenpunkten fragwürdig (zu vielen Teilchen zu betrachten!). Von einem makroskopischen Standpunkt aus erscheint der Festkörper als Kontinuum, als eine makroskopische Einheit. Für die Behandlung dieses Kontinuums ist das 3D-Integral extrem wichtig, wie wir bald sehen werden.

• Wir modellieren den Festkörper als ein System von Massenpunkten, deren Abstände unter allen Umständen konstant bleiben

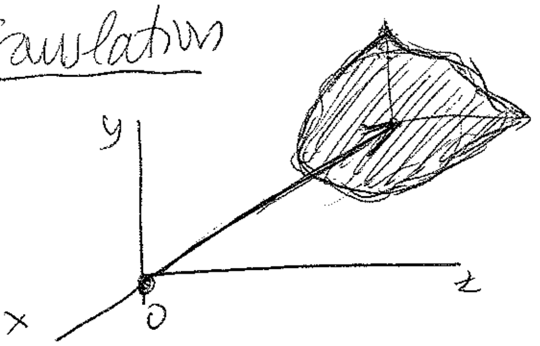
$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{konstant} \quad \text{für alle } i,j$$

Der starre Körper ist also per definitionem nicht deformierbar.

(Bemerkung: das ist eigentlich eine gute Idealisierung, aber für manche Materialen ist die Elastizität natürlich wichtig)

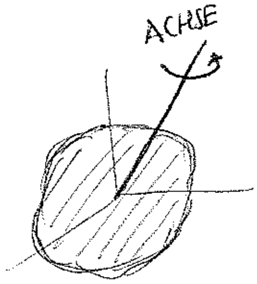
• Ein Massenpunkt hat 3 Freiheitsgrade, also die 3 Ortkoordinaten (x, y, z). Ein starrer Körper hat dagegen sechs

• Translation



⇐ 3 Freiheitsgrade. Das ist wie für ein Massenpunkt.

- <u>Rotation</u>: um einer Achse durch einen (mit dem Körper starr verbundenen) Punkt. Diese Bewegung existiert für einen Massenpunkt natürlich nicht.



Diese Bewegung bedeutet <u>noch 3 Freiheitsgrade</u>, nämlich zwei Winkelangaben zur Festlegung der Achse und ein Drehwinkel (um der Achse).

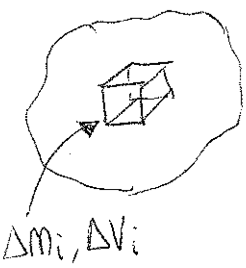
- Die Rotation ist also eine wichtige Bewegung, die wir nicht in einem Massenpunkt hatten. Wir hatten doch die Idee von Drehimpuls, und das werden wir später anwenden.

- <u>Von einem Mehrteilchensystem in das Kontinuum</u>

- Auf Seiten 37 und 38 haben wir für N-Teilchensysteme einige wichtige Größen eingeführt

  - Gesamtmasse $M = \sum_i m_i$
  - Schwerpunkt $\vec{Q} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$
  - Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$

- Wir werden nun diese Ideen für eine kontinuierliche Massenverteilung erweitern. Man zerlegt den starren Körper in kleinen Teilvolumina $\Delta V_i(\vec{r}_i)$, in denen die Masse $\Delta m_i(\vec{r}_i)$ enthalten ist.



Dann: $M = \sum_i \Delta m_i = \sum_i \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} \Delta V_i$

Wir lassen nun $\Delta V_i \to 0$

$\Delta m_i \to 0$

und kommen damit zur Definition der Massendichte

$$\rho(\vec r) = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta m \to 0}} \frac{\Delta m(\vec r)}{\Delta V(\vec r)}$$

Damit ist die Masse des Volumenelements in $\vec r$:

$$\Delta m(\vec r) = \underbrace{\rho(\vec r)}_{\text{Massendichte}}\ \underbrace{d^3 r}_{\text{Volumenelement (S. 91)}}$$

· Mit der Idee der Massendichte, und mit der Idee des Integrals als Limes einer Summe, können wir nun Gesamtmasse, Schwerpunkt und Gesamtimpuls einer kontinuierlichen Massenverteilung definieren:

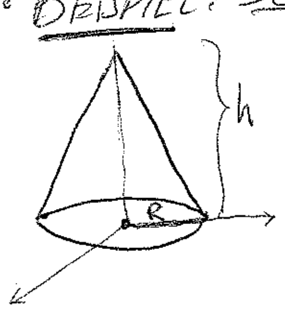
$$M = \int d^3 r\, \rho(\vec r)$$

$$\vec R = \frac{1}{M}\int d^3 r\, \rho(\vec r)\, \vec r$$

$$\vec P = \int d^3 r\, \rho(\vec r)\, \vec v(\vec r)$$

· Integriert wird jeweils über den Raumbereich des starren Körpers.

· **BEISPIEL**: Schwerpunkt eines Kegels mit homogener Massenverteilung



· Auf S. 94 haben wir das Volumen eines Kegels gerechnet.

· Homogener Massenverteilung heißt

$$\rho(\vec r) = \rho_0 \quad \text{innerhalb des Kegels}$$

ρ_0 konstant.

· Die Gesamtmasse ist also

$$M = \int \rho(\vec r)\, d^3 r = \rho_0 \int_{\text{Kegel}} d^3 r \overset{\text{S. 95}}{=} \rho_0 \frac{\pi R^2 h}{3}$$

· Dann $\vec{R} = \frac{1}{M}\int \rho(\vec{r})\,\vec{r}\,d^3r = \frac{\rho_0}{M}\int d^3r\,\vec{r} \stackrel{*}{=}$ S 94

* (sieh Unten)

$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$

$$= \frac{\rho_0}{M}\int_0^h dz \int_0^{\rho_{max}(z)} \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\,\left(\rho\cos\varphi\,\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\,\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{\rho_0}{M}\vec{e}_z \int_0^h dz \int_0^{\rho_{max}(z)} \rho\,d\rho\; 2\pi z$$

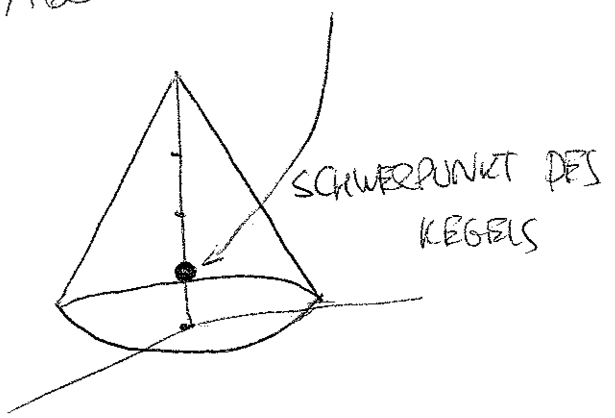
$$= \vec{e}_z\frac{\rho_0}{M}2\pi\int_0^h dz\,z\int_0^{\frac{R(h-z)}{h}}\rho\,d\rho = \vec{e}_z\frac{2\pi\rho_0}{M}\int_0^h dz\,z\,\frac{1}{2}\,\frac{R^2(h-z)^2}{h^2}$$

$$= \vec{e}_z\frac{\pi\rho_0 R^2}{h^2 M}\int_0^h dz\left[h^2 z - 2hz^2 + z^3\right]$$

$$= \vec{e}_z\frac{\pi\rho_0 R^2}{h^2 M}\left\{h^2\frac{h^2}{2} - 2h\frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4}\right\}$$

$$= \vec{e}_z\frac{\pi\rho_0 R^2}{h^2 M}\cdot\frac{1}{12}h^4 = \underbrace{\left(\frac{\pi R^2 h}{3}\right)\rho_0}_{M}\frac{1}{M}\,\frac{h}{4}\,\vec{e}_z$$

Also $\vec{R} = h/4\;\vec{e}_z$



* Bemerkung:

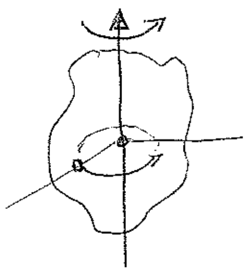
$$\int d^3r\,\vec{v}(\vec{r}) = \int d^3r\,\left(v_x(\vec{r}), v_y(\vec{r}), v_z(\vec{r})\right)$$

$$= \left(\int d^3r\,v_x(\vec{r}), \int d^3r\,v_y(\vec{r}), \int d^3r\,v_z(\vec{r})\right)$$

Ich erinnere euch, daß das Integral eine Summe ist. Also das Volumenintegral eines Vektors ist nicht mehr als eine Vektoraddition (S. 2). Also wir müssen einfach die verschieden Komponenten addieren, also die verschiedenen Komponenten integrieren! Mehr über Integralen von Vektoren später.

* Rotation um eine Achse

* Wir werden nun die Rotation um eine feste Achse untersuchen.



Da die Achse fest bleibt, besitzt das System nur ein Freiheitsgrad, nämlich den Drehwinkel φ um die Achse.

* Wir zerstückeln erstmal das Volumen in kleinen Massenpunkte $(m_i, \vec{r}_i)$ (wobei $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ bleibt per definitionem erhaltet). Jeder Punkt bewegt sich um die Achse (sagen wir die z-Achse). Damit hat das System eine gesamte kinetische Energie:

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$$

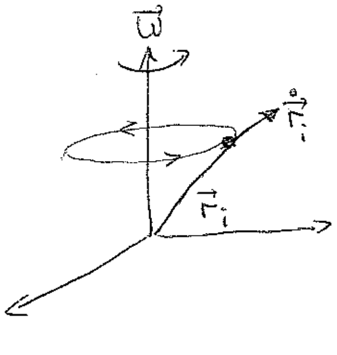
* Man beschreibt die Rotation mit Hilfe der Drehgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \qquad \text{wobei} \quad \omega = \dot{\varphi}$$

(<u>Bemerkung</u>: die Drehgeschwindigkeit ist also ein Vektor, der in Richtung der Achse geht. Wir haben die Idee von Drehgeschwindigkeit (mindestens in Betrag) auf S. 11 in unserer Diskussion der Kreisbewegung schon getroffen.)

· Drehgeschwindigkeit und Ortsvektor ergeben die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_i$

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \omega(-y_i \vec{e}_x + x_i \vec{e}_y)$$



(<u>Bemerkung</u>: in Polarkoordinaten $y_i = \rho_i \sin\varphi_i$
$x_i = \rho_i \cos\varphi_i$

S. 61

also $\dot{\vec{r}}_i = \omega\rho_i(-\sin\varphi_i \vec{e}_x + \cos\varphi_i \vec{e}_y)$

$= \omega \rho_i \vec{e}_{\varphi_i}$

Die Geschwindigkeit ist also tangens zur Radius des beschriebenen Kreises. Das ist natürlich so in einer Kreisbewegung (S. 11))

• Also $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (x_i^2 + y_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\sum_i m_i (x_i^2+y_i^2)\right]\omega^2$

Wir führen nun die sehr wichtige Idee von Trägheitsmoment ein:

$$\boxed{J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}$$

Dann $\boxed{T = \frac{1}{2} J \omega^2}$ Die kinetische Energie wird also von der Drehgeschwindigkeit und dem Trägheitsmoment gegeben.

* Wir gehen nun noch mal von unserem Bild der Massenpunkte (m_i) zu das Kontinuum (mit Massendichte $\rho(\vec{r})$). Also:

$$\boxed{J = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, (x^2+y^2)}$$

• Wenn die Bewegung nicht um die ~~z~~-Achse sondern um eine andere Achse ist, dann in allgemeinen:

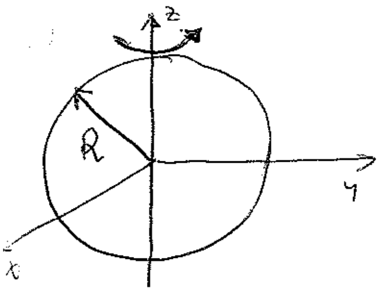
$$\boxed{J = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}\right)^2}$$

(z.B. für $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \rightarrow \vec{e}_z \times \vec{r} = -y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y$ als vorher.

$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_x \rightarrow \vec{e}_x \times \vec{r} = -z\,\vec{e}_y + y\,\vec{e}_z$)

(Bemerkung: Für die Rechnung von J wir wählen als Koordinaten-ursprung ein Punkt des Festkörpers, der auf der Drehungs-Achse liegt).

• **BEISPIEL**: Trägheitsmoment einer Kugel (mit homogener Massenverteilung)



$$J = \int d^3r\, \rho(\vec r) \left(\frac{\vec\omega}{\omega}\times\vec r\right) = \rho_0 \int d^3r\, (x^2+y^2)$$

Wir arbeiten natürlich in Kugelkoordinaten

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \end{array}\right\} x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta \qquad (S. 62)$$

$$d^3r \Rightarrow r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \qquad (S. 93)$$

$$= \rho_0 \int_0^R dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad r^2\sin^2\theta$$

$$= \rho_0 \int_0^R dr\, r^4 \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho_0 \frac{R^5}{5} \int_0^\pi d\theta \sin^3\theta$$

* gucken wir das Integral in θ:

Substitution: $u = \cos\theta$
$du = -\sin\theta\, d\theta$
$\int_0^\pi \longrightarrow \int_1^{-1}$

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sin^2\theta = \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, [1-\cos^2\theta] =$$

$$= \int_1^{-1} (-du)(1-u^2) \overset{S. 70}{=} \int_{-1}^1 du\, (1-u^2) = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

• Also:
$$J = 2\pi\rho_0 \frac{R^5}{5}\cdot\frac{4}{3} = \underbrace{\Big[\underbrace{\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)}_{\text{Volumen der Kugel}} \rho_0\Big]}_{\text{Masse der Kugel } (M)} \frac{2}{5}R^2$$

Also $\boxed{J = \frac{2}{5} M R^2}$

(Bemerkung: Wegen der Symmetrie der Kugel ist das Trägheitsmoment um allen Achsen gleich. Das ist natürlich nicht der Fall für andere Formen, wie z.B. ein Zylinder).

* Gucken wir nun was passiert mit dem Drehimpuls $\vec{L}$

Wir wollen hier nur die Komponente von $\vec{L}$ parallel zu $\vec{\omega}$

(Bemerkung: $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ sind nicht immer parallel. Das ist nur der Fall wenn die Drehungsachse eine sogen. Hauptträgheitsachse des Objekts ist. Wir werden später in dieser Vorlesungsreihe die Idee von Hauptträgheitsachsen diskutieren.)

Die Komponente von $\vec{L}$ parallel zu $\vec{\omega}$ ist per definitionem von Skalarprodukt (S. 4): $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ (S. 40)

Eigenschaften des Spatprodukts (S. 7)

$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$$L_\omega = \vec{L} \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right) \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \sum_i m_i \left[\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) \times \vec{r}_i\right] \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}_i\right) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \left[\sum_i m_i \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2\right] \omega = J\omega$$

Dann $\boxed{L_\omega = J\dot{\varphi}}$

Wir wissen schon, daß $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(ex)}$ (Drehimpulssatz S. 40)

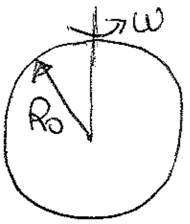
Dann
$$\underbrace{\frac{dL_\omega}{dt}}_{J\ddot{\varphi}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) = \vec{M}^{(ex)} \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ex)}\right) \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right) \overset{\text{S. 7}}{=} \frac{1}{\omega} \sum_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot \vec{F}_i^{(ex)}$$

Dann $J\ddot{\varphi} = \frac{1}{\omega} \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{(ex)}$

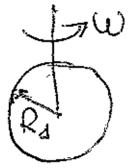
* Ganz klar, wenn $\vec{M}^{(ex)} \cdot \vec{\omega} = 0$, dann $L_\omega \equiv$ konstante
und damit $J\omega$ = konstant.

<u>Bemerkung</u>: Also, noch mal, wir müssen ein Drehmoment um die Achse üben (und das verlangt $\vec{M}^{ex} \cdot \vec{\omega} \neq 0$), wenn wir den Drehimpuls um die Achse ändern wollen)

• Wenn das Trägheitsmoment J eine Konstante ist, dann wenn L_ω konstant ist, dann ist auch ω.
Aber manchmals ist J keine Konstante! Was denn?
Nehmen wir unseren Beispiel des Kugels



$J_0 = \frac{2}{5} M R_0^2$
Wenn R_0 abnimmt
bis zum einen Radius R_1



$\Longrightarrow J_1 = \frac{2}{5} M R_1^2$

und L_ω muss erhaltet werden, dann $J_0 \omega = J_1 \omega'$

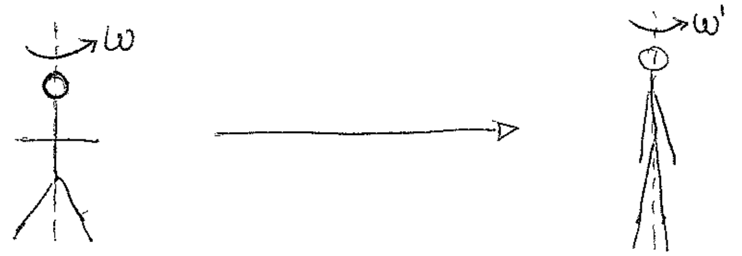
also: $\omega' = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 \omega \xrightarrow[R_0 > R_1]{} \omega' > \omega$

Also wenn der Radius abnimmt, nimmt die Drehgeschwindigkeit zu!

• Das passiert z.B. im All, z.B. in den sogen. <u>Pulsars</u>.
Eine starke Verkleinerung der räumlichen Ausdehnung beschleunigt die Rotation eines <u>Neutronsternes</u> so stark, daß die Rotationsdauer anstatt mehrerer Tage nur noch Sekunden oder sogar Sekundenbruchteile beträgt !!

z.B. PSR J1748−2446ad rotiert 716 mal pro Sekunde (!!)
(Dieser Pulsar hat ein Radius $\lesssim$ 16 Km)

• Etwas ähnliches passiert mit einem Eisskater



Mit gestreckten Armen rotiert der Skater langsamer.

Ihr habt das sicher gesehen, oder sogar erfahren!