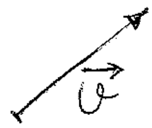
• Vektoren

· In der Physik gibt es Variablen (wie die Masse, die Zeit, die Temperatur), die wir einfach mit einem Zahl beschreiben können. Die sind die sogen. <u>skalare Variablen</u>.

· Es gibt allerdings andere Variablen (wie die Geschwindigkeit, oder die Kraft), die dazu auch eine assoziierte Richtung haben. Es ist nicht nur wichtig zu wissen, wie schnell ich fahre, sondern auch wohin! Diese Variablen mit einem Betrag und einer Richtung sind die <u>Vektoren</u>.

· Ihr habt schon etwas über Vektoren gelernt. Hier werden wir nun ein Paar Ideen auffrischen, und vielleicht noch einige neue Begriffe einführen.

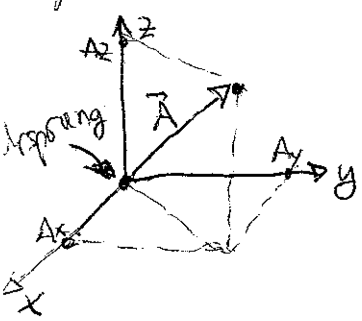
· Am besten werden Vektoren als <u>Pfeile</u> dargestellt.



Ich werde hauptsächlich Vektoren in einem 3D-Raum betrachten, aber im Prinzip Vektoren können in Räumen aller möglichen Dimensionen (außer Null) definiert werden.

<u>Kartesischen Koordinaten</u>

Die Darstellung eines Vektors als eine Pfeile führt zu einer einfachen analytische Darstellung von Vektoren, und zwar mit Hilfe der Kartesischen Koordinaten in dem 3D-Raum.



$$\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$$ also wie die Koordinaten eines Punkts in 3D

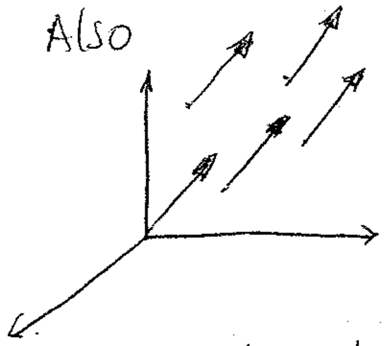
A_x, A_y, A_z sind die <u>Komponenten</u> von $\vec{A}$

· Der <u>Betrag</u> des Vektors is $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ und ergibt die Länge des Vektors.

Bemerkungen

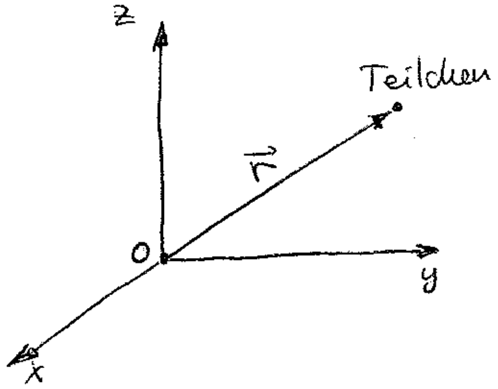
- Typischerweise ist der Anfangspunkt des Vektors unwichtig. Nur Betrag und Richtung sind wichtig.

Also



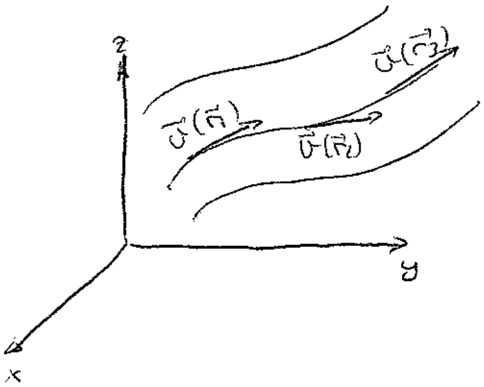
Alle diese Vektoren sind für uns das gleiche, die Verschiebung ist also unwichtig.

- Die Ausnahme ist der Ortsvektor $\vec{r}$. Der ergibt wo ein Teilchen im Raum ist. Hier ist der Anfangspunkt natürlich wichtig. Der Anfangspunkt ist der Ursprung der Koordinaten



Wir werden später viel mehr über den Ortsvektor erfahren.

- Die Vektoren können auch eine Funktion der Raum sein



z.B. die Geschwindigkeit von einer Flüssigkeit (z.B. ein Fluß) ist typischerweise ortsabhängig.

Das nennt man ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$

(Skalare Variablen, die ortsabhängig sind, nennt man Skalarfelder).

Wir werden in dieser Vorlesung mehrere Beispiele von Felder sehen.

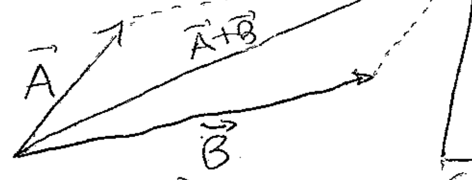
Aber nun zurück an der Eigenschaften von Vektoren.

* Vektoraddition

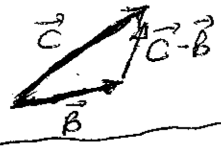
- Die Addition von 2 Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ist eigentlich sehr einfach

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z) \\ \vec{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)\end{array}\right\} \vec{A}+\vec{B} = (A_x+B_x,\ A_y+B_y,\ A_z+B_z)$$

* graphisch dargestellt:



- Natürlich kann man auch Vektoren substraieren



* Es is trivial zu sehen, daß $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ (kommutativ)

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) \quad \text{(assoziativ)}$$

* Produkt mal ein Skalar

- Sei λ ein Skalar, und $\vec{A}$ ein Vektor

$$\lambda\vec{A} \equiv (\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z) \longrightarrow$$ das ist natürlich noch ein Vektor.

· Linearkombination

- Ich kann eigentlich eine Linearkombination von Vektoren machen

$$\vec{C} = \lambda\vec{A} + \gamma\vec{B} \quad \longleftarrow$$ das ist auch noch ein Vektor

· Einheitsvektoren

- Sei ein Vektor $\vec{A}$. Dann $\vec{u}_A \equiv \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ erfüllt $|\vec{u}_A| = 1$.

$\vec{u}_A$ ist ein Beispiel von Einheitsvektor.

- Prominente Beispiele von Einheitsvektoren sind die entlang der Koordinatenachsen; ich benutze die Schreibweise

$\vec{e}_x \equiv (1,0,0)$, $\vec{e}_y \equiv (0,1,0)$, $\vec{e}_z \equiv (0,0,1)$

- Dann $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ bedeutet eigentlich die Linearkombination

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$$

- Note: Irgendwelche 3 Vektoren, die miteinander ein 90° Winkel bauen, können als Koordinaten benutzt werden. Man kann die Komponenten der Vektoren in verschieden Koordinaten-systemen transformieren. Diese Transformationen verlangen allerdings Matrizen. Die werden wir später sehen.

- Skalarprodukt

- Seien $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ und $\vec{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)$

Man definiert den Skalarprodukt $(\vec{A}\cdot\vec{B})$ als:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ ist also ein Skalar (daher die Name "Skalarprodukt")

- Wir können die bequemere Schreibweise

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$

anwenden, wobei $i = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$.

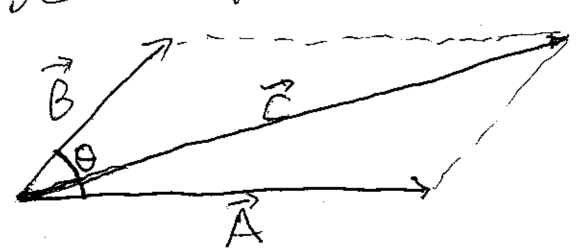
- Es ist trivial zu sehen, daß $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- Es ist auch einfach zu sehen, daß $\vec{A}\cdot\vec{e}_i = A_i$
- Andere Eigenschaften sind auch einfach zu beweisen:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$\vec{A}\cdot(\lambda\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\cdot\vec{B} = \lambda(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = \sum_i A_i^2 = |\vec{A}|^2$$

- Der Skalarprodukt hat eine einfache graphische Bedeutung:

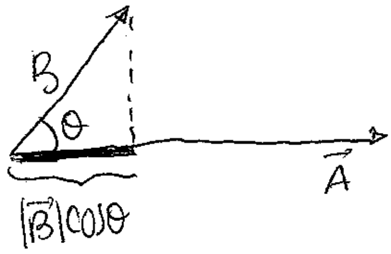


$$|\vec{C}|^2 = \vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A}$$
$$= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

* Aber aus der Trigonometrie weiß man, daß

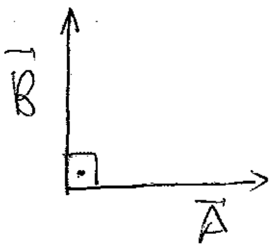
$$|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

Also: $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$



Wenn $|\vec{A}|=1$ (Einheitsvektor) ist denn $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ganz einfach die Projektion des Vektors $\vec{B}$ entlang $\vec{A}$.

* Es ist denn einfach zu verstehen, daß wenn $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ein 90°-Winkel bauen, dann



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow$$ $\vec{A}$ und $\vec{B}$ sind Orthogonal

· Natürlich wenn $\vec{A}$ und $\vec{B}$ parallel sind, dann $\theta = 0$ und $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$

In allgemeinen $\vec{A}\cdot\vec{B} \leq |\vec{A}||\vec{B}|$ (Schwarzsche Ungleichung)

* Da die Einheitsvektoren $\vec{e}_{x,y,z}$ orthogonal zu einander sind, und außerdem $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y\cdot\vec{e}_y = \vec{e}_z\cdot\vec{e}_z = 1$, dann

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$$ ← das entspricht die sogen. Kronecker-Delta δ_{ij}

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}}$$; Also $\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(\sum_i A_i\vec{e}_i\right)\left(\sum_j B_j\vec{e}_j\right)$

$$= \sum_{i,j} A_i B_j (\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j) = \sum_{i,j} A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_i$$

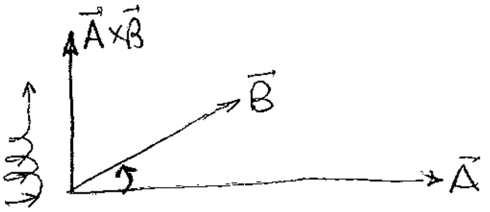
· Kreuzprodukt

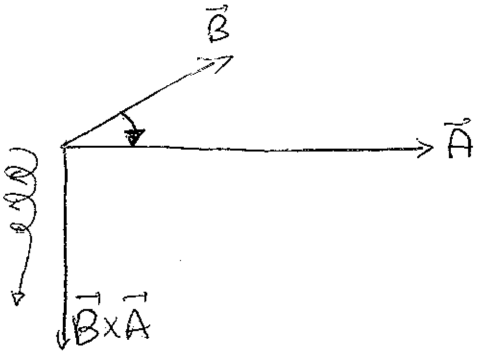
: Wir können 2 Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ anders multiplizieren.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \longrightarrow$$ Das ist der sogen. Kreuzprodukt, der noch ein Vektor ergibt.

Der Vektor $\vec{C}$ ist orthogonal zu $\vec{A}$ und zu $\vec{B}$

· Die Richtung von $\vec{A} \times \vec{B}$ ist ganz einfach zu bestimmen und zwar mit Hilfe des Schraubenzieher-Tricks: man "geht" von $\vec{A}$ zu $\vec{B}$. Wenn das geht anti-uhrweise → nach oben (Sieh Abbildung) und wenn uhrweise → nach unten.



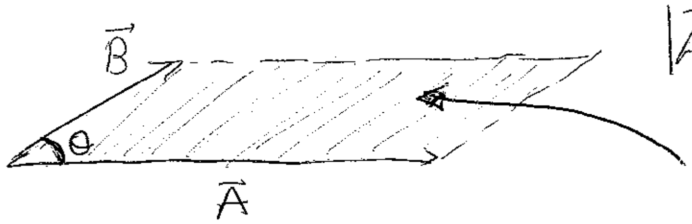


Es ist also einfach zu sehen, daß

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \Rightarrow \underline{\text{Anti-Kommutativ}}$$

· Natürlich das heißt, daß $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ für alle $\vec{A}$.

· Der Betrag von $\vec{A} \times \vec{B}$ hat auch eine einfache graphische Bedeutung



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta$$

$$\equiv$$

Fläche des von $\vec{A}, \vec{B}$ aufgespannten Parallelogramms

* Die Kreuzprodukte der Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ sind

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

(Beweis es!)

* Wir können nun $\vec{A}\times\vec{B}$ als Funktion der Kartesischen Koordinaten ausdrücken:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z)\times(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z)$$

$$= (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{e}_x\times\vec{e}_y + (A_xB_z - A_zB_x)\,\vec{e}_x\times\vec{e}_z + (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{e}_y\times\vec{e}_z$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,\vec{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{e}_z$$

Also
$$(\vec{A}\times\vec{B})_x = A_yB_z - A_zB_y$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_y = A_zB_x - A_xB_z$$
$$(\vec{A}\times\vec{B})_z = A_xB_y - A_yB_x$$

• Der Kreuzprodukt erfüllt

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) &= \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}\\ (\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C} &= \vec{A}\times\vec{C} + \vec{B}\times\vec{C}\end{aligned}\right\}\ \text{distributiv}$$

$$\vec{A}\times(\lambda\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\times\vec{B} = \lambda(\vec{A}\times\vec{B})$$

• Aus der Definition wenn $\vec{A}$ und $\vec{B}$ sind parallel, dann $\vec{A}\times\vec{B}=0$ (Note: wenn $\vec{A}$ und $\vec{B}$ sind parallel, dann $\vec{B}=\lambda\vec{A}$ für irgendwelche λ, also $\vec{A}\times\vec{B} = \lambda(\vec{A}\times\vec{A}) = 0$)

• Wir können die Komponenten von $\vec{A}\times\vec{B}$ eleganter schreiben:

$$\boxed{(\vec{A}\times\vec{B})_j = \sum_{k,l}\epsilon_{jkl}\,A_kB_l}$$

wobei ϵ_{jkl} die sogen. Levi-Civita-Symbolen sind.

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 0 & \text{wenn zwei Indizes gleich sind} \\ 1, & \text{wenn } j,k,l \text{ zyklisch sind (also 123, 231, 312)} \\ & \text{(wie immer } 123 \equiv xyz) \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

also $(3,2,1), (1,3,2), (2,1,3)$

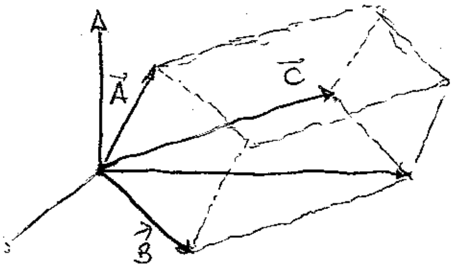
• Spatprodukt

• Seien $\vec{A}, \vec{B}$ und $\vec{C}$ Vektoren.

Der Spatprodukt ist als $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ definiert.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = A_x(B_yC_z - B_zC_y) - A_y(B_xC_z - B_zC_x) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

• Der Spatprodukt hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung.
Die Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ definieren ein Parallelepiped.



• Wir wissen schon, daß $|\vec{B}\times\vec{C}|$ die Fläche des von $\vec{B}, \vec{C}$ aufgespannten Parallelograms entspricht. Außerdem ist $\vec{B}\times\vec{C}$ senkrecht zu dieser Fläche.

Aus der Definition von Skalarprodukt ist also $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ die Projektion von $\vec{A}$ auf $(\vec{B}\times\vec{C})$.
Damit ist $|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$ das Volumen des Parallelepipeds

• Es ist einfach zu beweisen (die o.g. graphische Bedeutung hilft dabei) daß:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$$

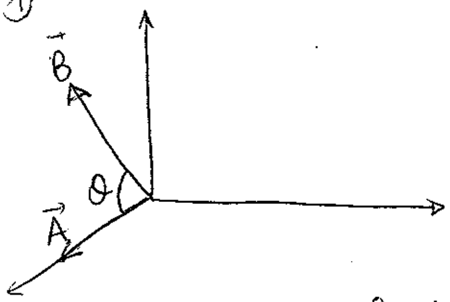
• Kreuzprodukt und Skalarprodukt spielen eine sehr große Rolle in der Physik. Die tauchen fast überall, z.B.

* Drehimpuls ⇒ wird als $\vec{r}\times\vec{p}$ definiert (das werden wir genauer in unserer Diskussion der Mechanik betrachten)
  $\vec{r}$ ← Ortvektor, $\vec{p}$ ← Impulsvektor

* Lorentz-Kraft ⇒ $q\,\vec{v}\times\vec{B}$ ← Magnetfeld (das werden wir genauer in unserer Diskussion des Elektromagnetismus in RdP II)
  q ← Ladung, $\vec{v}$ ← Geschwindigkeitsvektor

* Beispiele

1



- $\vec{A} = (1,0,0)$
- $\vec{B} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$

} Die beide sind Einheitsvektoren (überprüfen)

- Wie ist θ?

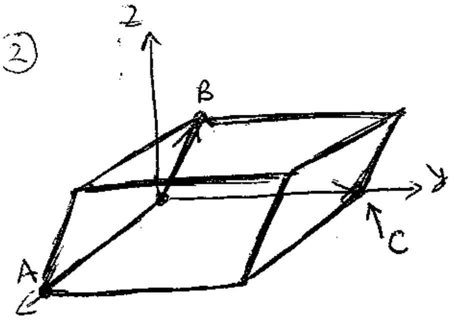
* ganz einfach:
  - Skalarprodukt: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 1/\sqrt{2} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$
  - Vektorprodukt $\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = (1,0,0)\times(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

* Note: $(1,0,0)\times(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trick}}}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$ ← Determinant

$= \vec{e}_y(-1/\sqrt{2}) = (0, -1/\sqrt{2}, 0) \longrightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = 1/\sqrt{2} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$

Also $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1 \longrightarrow \theta = \pi/4$ (also $45°$)

2



$\vec{A} \equiv (3,0,0)$
$\vec{B} = (0,1,2)$
$\vec{C} = (0,4,0)$

} Wie ist das Volumen des Parallelepipeds?

- Einfach $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) \Rightarrow (\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8\,\vec{e}_x$

$3\vec{e}_x \cdot (-8)\vec{e}_x = -24 \longrightarrow \boxed{\text{Volumen} = 24}$

- **ABLEITUNG**

* Sei $f(x)$ eine Funktion (also eine Kurve) der Variable x.

z.B: $\cos x$, $\sin x$, x^2+5, ...

* Die Ableitung von $f(x)$ an x ist

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

(die Schreibweise $f'(x)$ ist auch häufig benutzt)

Die Ableitung df/dx ergibt den Anstieg der Kurve $f(x)$ bei x.

- Die Ableitung erfüllt wichtige Eigenschaften:

* $\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x)$ (Linearität)

* $\frac{d}{dx}[f(x) g(x)] = \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx}$ (Produktregel)

* $\frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{dg}{dx}(x) \frac{df}{dx}[g(x)]$ (Kettenregel)

Diese Eigenschaften sind extrem wichtig.

- Sehen wir ein Paar Beispiele:

a) $f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\sin x$

b) $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

$\Big\}$ nur als Auffrischung!

c) $f(x) = x^2 \cos x = g(x) h(x)$ wobei $g(x) = x^2$, $h(x) = \cos x$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dg}{dx} = 2x \\ \frac{dh}{dx} = -\sin x \end{array}\right\} \text{also } \frac{df}{dx} \underset{\uparrow}{=} \frac{dg}{dx} h(x) + g(x) \frac{dh}{dx} = 2x\cos x - x^2 \sin x$$

Produktregel!

d) $f(x) = \sin(\sqrt{x}) = g(h(x))$ wobei $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt{x}$

$$\left.\frac{dh}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \; ; \; \frac{dg}{dx} = \cos x \right\} \text{also } \frac{df}{dx} = \frac{dh}{dx} \frac{dg}{dx}[h(x)] \Leftarrow \text{Kettenregel!}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$$

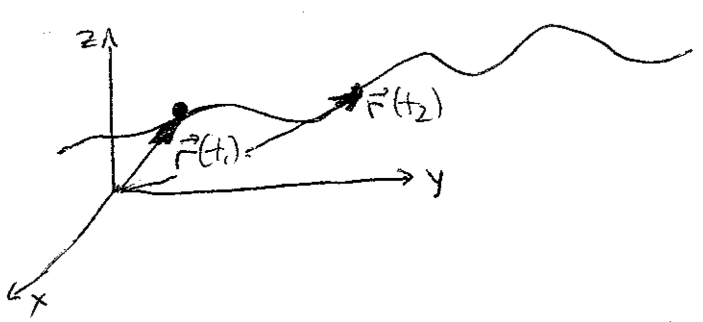
- Differenzieren einer Vektorfunktion

Sei $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ ein Vektor dessen Komponenten Funktionen der Variable t sind.

Dann, die Ableitung von $\vec{a}(t)$ nach t ist

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dz}\right)$$

- Ein prominenter Beispiel von Vektorfunktion ist z.B. der Ortsvektor $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, der die Bahn eines Teilchens beschreibt.



Man definiert den Geschwindigkeitsvektor als

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (v_x, v_y, v_z)$$

- Die Ableitung einer Ableitung heißt zweite Ableitung

(Note: die Ableitung der zweiten Ableitung ist natürlich die dritte Ableitung, usw)

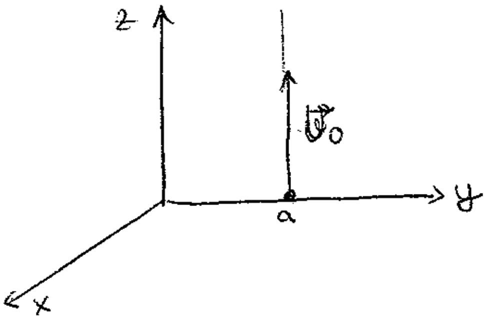
Die zweite Ableitung wird so geschrieben: $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$

(Note: die n-te Ableitung wäre $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$)

- Die zweite Ableitung des Ortsvektors (also die erste Ableitung des Geschwindigkeitsvektors) ist der Beschleunigungsvektor: $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$

* Sehen wir nun einige Beispiele

- Geradlinige Bewegung

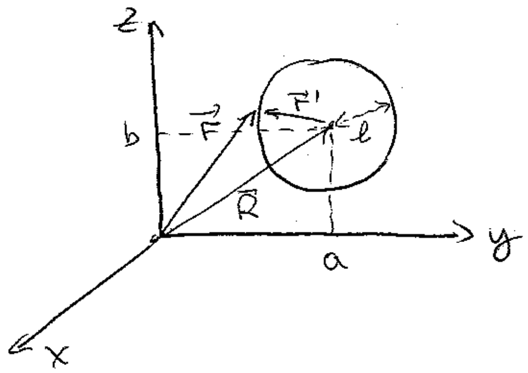


$\vec{r}(t) = (0, a, v_0 t)$

$\vec{v}(t) = (0, 0, v_0)$

$\vec{a}(t) = 0 \leftarrow$ Keine Beschleunigung

- Kreisbewegung



$\vec{r}' = \ell(0, \cos\omega t, \sin\omega t) \rightarrow |\vec{r}'| = \ell$

$\vec{R} = (0, a, b)$

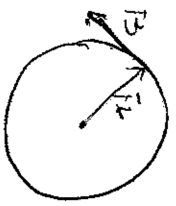
$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = [0, a + \ell\cos\omega t, b + \ell\sin\omega t]$

$\vec{v}(t) = [0, -\ell\omega\sin\omega t, \ell\omega\cos\omega t] = \ell\omega(0, -\sin\omega t, \cos\omega t)$

$\vec{a}(t) = -\omega^2 \ell[0, \cos\omega t, \sin\omega t] = -\omega^2 \vec{r}'$

Nun gibts es doch eine Beschleunigung $|\vec{a}| = \ell\omega^2$

Es ist einfach zu sehen, daß $\vec{r}' \cdot \vec{v} = 0$, also d.h. daß die Bewegung immer senkrecht zum Radius ist.



* Partielle Ableitung

Bisher haben wir Funktionen einer Variable studiert. Wir werden nun sehen was passiert, wenn man Funktionen mehrerer Variablen hat.

· Sei $f = f(x,y,z)$ eine Funktion von 3 Variablen x, y und z.

Man definiert z.B. die partielle Ableitung nach y so:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{df}{dy}\right)_{\substack{\text{für } x \text{ und } z\\ \text{konstant}}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x,y+\epsilon,z) - f(x,y,z)}{\epsilon}$$

Ähnlicherweise können wir $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ definieren.

(Note: $\frac{\partial}{\partial x} \equiv$ Partielle Ableitung nach x, $\frac{d}{dx} \equiv$ Totale Ableitung nach x)

· Natürlich können wir die Definition für Funktionen von n Variablen erweitern

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$, dann $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1 \dots x_n) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_1 \dots x_j + \epsilon, \dots x_n) - f(x_1 \dots x_n)}{\epsilon}$

· Beispiel

$$f(x,y) = x \cos ky$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos ky$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -kx \sin ky$$

· Für die partielle Ableitungen kann man auch die 2. Ableitung definieren, aber nun soll man ein bisschen aufpassen, da es verschiedene Möglichkeiten gibt: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

· zum Beispiel, für $f(x,y) = x\cos ky$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -K^2 x \cos ky$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -K \sin ky$$

* Partielle Ableitungen (besonders 1. und 2. Ableitungen) spielen eine extrem wichtige Rolle in der Physik.
* Die Idee von partieller ~~Ableitung~~ bringt uns direkt an der wichtige Idee von <u>Gradient</u>

---

* <u>Gradient</u>
* Sei $\varphi(x,y,z)$ eine Skalar Funktion von x, y und z (also ein Skalarfeld s. ①)

Man definiert den <u>Gradient von φ</u> als:

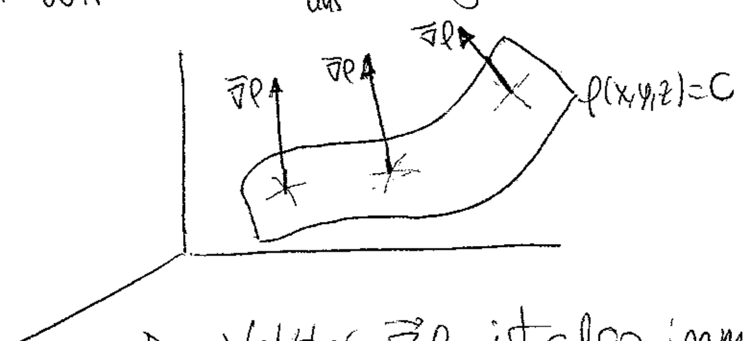
$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

wobei

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ist der <u>Nabla-Operator</u>.

* Wir können uns den Gradient ziemlich einfach vorstellen.



· Sei die Fläche

$$\varphi(x,y,z) = C \equiv \text{konstant}$$

· Der Gradient $\vec{\nabla}\varphi$ gibt uns die Änderung der Funktion $\varphi(x,y,z)$.

Der Vektor $\vec{\nabla}\varphi$ ist also immer senkrecht zur Fläche an jedem Punkt.

* Tatsächlich, für einen gegebenen Punkt (x,y,z), ~~e~~gibt der gradient $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ die Richtung, entlang deren die Funktion f am meisten wächst.

* Das ist besonders nützlich wenn man eine Funktion <u>minimieren</u> will: • Man start am $(x_0,y_0,z_0) \equiv \vec{r}_0$

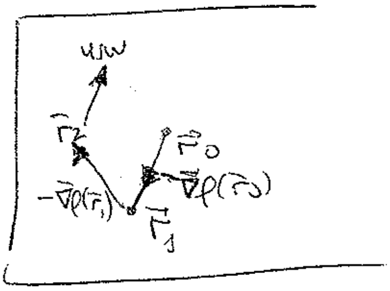
  • Man rechnet $\vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{r}_0)$

  • Man geht von $\vec{r}_0$ ein kleines bisschen in Richtung $-\vec{\nabla} f(\vec{r}_0)$

  $\vec{r}_0 \longrightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_0 - \epsilon \left[\frac{\vec{\nabla} f(\vec{r}_0)}{|\vec{\nabla} f(\vec{r}_0)|}\right]$ $(\epsilon \ll 1)$ ← Einheitsvektor

  • Man rechnet $\vec{\nabla} f(\vec{r}_1)$

  • Man geht von $\vec{r}_1$ ins $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \epsilon \left[\frac{\vec{\nabla} f(\vec{r}_1)}{|\vec{\nabla} f(\vec{r}_1)|}\right]$



  usw

Diese Methode bringt uns bis in einem Minimum der Funktion hinein (mindestens ein lokales Minimum)

* <u>Beispiel</u>

· Sei $f(x,y,z) = xy + yz$, wie ist $\vec{\nabla} f$ am $(1,1,1) \equiv \vec{r}_0$

$$\left.\begin{aligned} \partial f/\partial x &= y \\ \partial f/\partial y &= x+z \\ \partial f/\partial z &= y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} f &= y\,\vec{e}_x + (x+z)\,\vec{e}_y + y\,\vec{e}_z \\ \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) &= \vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y + \vec{e}_z \end{aligned}$$

* Ableitung auf der Bahn eines Teilchens.

. Es ist besonders nützlich zu betrachten, was passiert wenn wir eine Funktion f auf der Bahn eines Teilchens definieren.

· Sei $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ die Bahn eines Teilchens.

Wir definieren $f(\vec{r}(t)) \longrightarrow$ wir sind an $\partial_t f(\vec{r}(t))$ interessiert. Das geht sehr einfach so:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f\left[x(t), y(t), z(t)\right] \overset{\text{einfach die Kettenregel}}{=} \frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$$

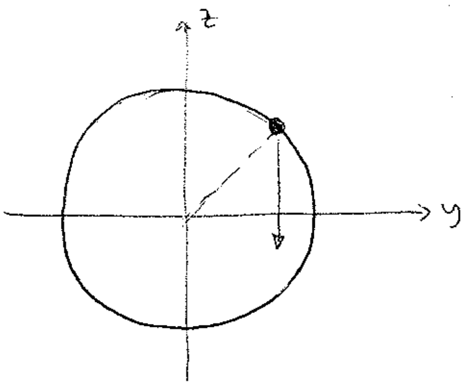
* Beispiel:

· Sei eine Kreisbewegung $\vec{r}(t) = l\,(0, \cos\omega t, \sin\omega t)$

· Sei $\phi(\vec{r}) = \alpha y$

Dann $\partial_t \phi(\vec{r}(t)) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\phi = l\omega\,(0, -\sin\omega t, \cos\omega t) \cdot (\alpha \vec{e}_y)$

$$= -l\omega\alpha \sin\omega t$$



. Das beschreibt z.B. die Zeitänderung des Schwerkraftspotentials eines bewegten Teilchens auf einem Kreis.

* DIVERGENZ

(also ein Vektorfeld, s. ⑪)

· Sei eine Vektorfunktion $\vec{V}(x,y,z) = (V_x(x,y,z), V_y(x,y,z), V_z(x,y,z))$

Die Divergenz von $\vec{V}$ wird so definiert:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\cdot(V_x, V_y, V_z)$$

(also die Divergenz ist das Skalarprodukt von $\vec{\nabla}$ und $\vec{V}$)

$$= \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z$$

(Note: Hier habe ich die bequeme Schreibweise $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ eingeführt)

· Die Vektoren $\vec{V}$, die $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0$ erfüllen, heißen Quellenfreien Vektoren.

Ein prominenter Beispiel davon ist das Magnetfeld $\vec{B}$

(also $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, wie wir in RdP II sehen werden).

· Beispiel:

Sei $\vec{V} = \cos(x+y)\,\vec{e}_x + \sin(y+z)\,\vec{e}_y$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &= -\sin(x+y) \\ \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \cos(y+z) \\ \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\sin(x+y) + \cos(y+z)$$

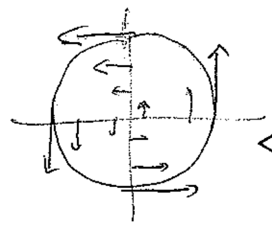
* ROTATION

· Sei noch mal eine Vektorfunktion $\vec{V}(x,y,z) = (V_x(\vec{r}), V_y(\vec{r}), V_z(\vec{r}))$
Die Rotation von $\vec{V}$ ist der Kreuzprodukt von $\vec{\nabla}$ und $\vec{V}$

also:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

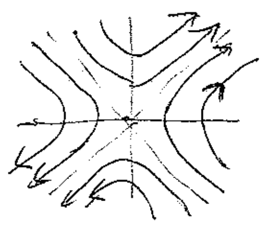
· Es gibt Vektoren, die $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ erfüllen. Diese sind die sogen. Wirbelfreien Vektoren. Ein prominenter Beispiel davon ist das elektrische Feld $\vec{E}$ in der Elektrostatik (mehr davon in RdP II).



$\vec{V}_1$ sie hat klar ein Wirbel

· Beispiel:

· $\vec{V}_1 = (-y, x, 0) \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = 2\,\vec{e}_z$



$\vec{V}_2$ $\Downarrow$ wirbelfrei!

· Aber $\vec{V}_2 = (y, x, 0) \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V}_2 = 0$

· Noch ein klarer Beispiel von wirbelfreien Feld ist der Ortsvektor $\vec{r}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial z} y \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} \cancel{x} - \frac{\partial}{\partial x} z \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x \right) \vec{e}_z$$

$$= 0$$

* MEHRFACHEN ANWENDUNGEN DES NABLA-OPERATORS

· Wir können den Nabla-Operator mehrfach anwenden (das entspricht ungefähr dieselbe Idee wie die 2. Ableitung auf S. 10). Diese mehrfache Anwendungen von $\vec{\nabla}$ tauchen ziemlich viel in der Physik auf.

· LAPLACE-OPERATOR

· Der Laplace-Operator einer Skalarfunktion ist die Divergenz des Gradients der Funktion:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}$$

· Der Laplace-Operator spielt eine sehr bedeutende Rolle in der Physik, z.B.

· Die Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ ist die sogen. Laplace-Gleichung und ist sehr wichtig für die Theorie des Elektromagnetismus (wir werden diese Gleichung in RdP II noch mal treffen).

· ROTATION EINES GRADIENTS

· Sei $\varphi(x,y,z)$ eine Skalarfunktion. Mal sehen was passiert wenn wir $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi)$ machen:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \vec{e}_x\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\right)$$

$$+ \vec{e}_z\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

Also $\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0}$ und zwar für alle Skalarfunktionen φ.

Also der Gradient $\vec{\nabla}\varphi$ ist immer ~~ein~~ wirbelfreier Vektor. (S. 17)

Andersum jede wirbelfreier Vektor kann als Gradient einer Skalarfunktion geschrieben werden.

Ein prominenter Beispiel dann ist das elektrische Feld ($\vec{E}$) in der Elektrostatik (mehr dann in RdP II). Für das $\vec{E}$-Feld in der Elektrostatik $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$, also $\vec{E}$ kann als $\vec{E}=\vec{\nabla}\varphi$ geschrieben werden. Diese Funktion (eigentlich $-\varphi$) ist das sogen. Skalarpotential.

· DIVERGENZ EINER ROTATION

· Sei $\vec{V}(x,y,z)$ eine Vektorfunktion.

· Man kann ziemlich einfach beweisen (mach es!) daß

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V})=0}$$

· Also $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ ist immer ein quellenfreier Vektor. Umgekehrt jeder quellenfreier Vektor kann als Rotation eines Vektors geschrieben werden.

· Ein prominenter Beispiel dann is das Magnetfeld $\vec{B}$. $\vec{B}$ erfüllt $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, und damit existiert ein Vektor $\vec{A}$, welch daß $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$. Dieser Vektor $\vec{A}$ heißt Vektopotential und spielt eine sehr bedeutende Rolle in der Theorie des Elektromagnetismus (mehr dann in RdP II).

· Damit sind wir fertig (mindestens vorläufig) mit der Theorie der Vektoren, der Ableitung und des Nabla-Operators.

· Nun werden wir unsere neue Kentnisse anwenden, und zwar in unserer Diskussion der Newton-Mechanik.