

Übungen zu Physik I, Hausübung 6

Dozenten: Prof. Dr. Herbert Pfnür, Prof. Dr. Luis Santos

Übungsleiter: Tammo Block, Markus Otto, Jochen Zahn

Abgabe: Dienstag, 17.11.2009 vor der Vorlesung

[H23] Trägheitsmoment (2 + 1 = 3 Punkte)

- (a) Ein Methan-Molekül (CH_4) kann als Tetraeder mit einem H-Atom in jeder Ecke, einem C-Atom in der Mitte und einer Seitenlänge von 0,18 nm beschrieben werden. Wie groß ist das Trägheitsmoment bezüglich der Achse die durch das C- und eines der H-Atome verläuft?
- (b) Mithilfe eines Motors soll eine Raumsonde gedreht werden, um die Solarzellen zur Sonne auszurichten. Der Rotor eines in der Sonde eingebauten Elektromotors besitzt ein Trägheitsmoment $I_M = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ bezüglich seiner Drehachse, das Trägheitsmoment der Sonde um die gleiche Achse ist $I_S = 12 \text{ kg m}^2$. Wie viele Umdrehungen muss der Rotor ausführen, damit sich die Sonde 30° um diese Achse dreht?

[H24] Kugelkoordinaten (1 + 1 + 0,5 + 0,5 + 1 + 1 = 5 Punkte)

- (a) Zeige, dass für die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ gilt (d.h. z.B. $\partial_y r = \sin \theta \sin \phi$)

$$\begin{pmatrix} \partial_x r & \partial_y r & \partial_z r \\ \partial_x \theta & \partial_y \theta & \partial_z \theta \\ \partial_x \phi & \partial_y \phi & \partial_z \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi & r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\frac{\sin \phi}{\sin \theta} & \frac{\cos \phi}{\sin \theta} & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Zeige, dass die in der Vorlesung definierten Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ und \vec{e}_ϕ ein orthonormales Rechtssystem bilden, d.h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{r, \theta, \phi\}$ und $\vec{e}_r = \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi$.
- (c) Zeige, dass sich die kartesischen Einheitsvektoren folgendermaßen schreiben lassen:

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y &= \sin \theta \sin \phi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_\theta + \cos \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z &= \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

(Hinweis: Besonders einfach geht das, wenn man verwendet, dass sich ein beliebiger Vektor \vec{v} durch Projektion in jedem beliebigen orthonormalen Koordinatensystem \vec{e}_i als $\vec{v} = \sum_i (\vec{v} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$ schreiben lässt.)

- (d) Die Bahnkurve eines Teilchens sei in Kugelkoordinaten durch $(r(t), \theta(t), \phi(t))$ gegeben. Zeige, dass für die Geschwindigkeit gilt

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

- (e) Zeige, dass in Kugelkoordinaten gilt (Tipp: Verwende (a) und (c). Weniger Rechnen aber mehr Denken ist nötig, wenn man (d) als Ausgangspunkt verwendet.)

$$\vec{\nabla} f = \partial_r f \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi f \vec{e}_\phi$$

- (f) Eine Kraft sei in Kugelkoordinaten durch

$$\vec{F} = \frac{2P \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{P \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta$$

gegeben. Berechne die Rotation. Falls das Feld wirbelfrei ist, gebe ein Potential V an, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.

Bitte wenden!

[H25] *Elastischer Stoß* (0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit \vec{v} stößt elastisch mit zwei ruhenden Teilchen mit der gleichen Masse.

- (a) Berechne die gesamte kinetische Energie im Labor- und im Schwerpunktsystem.
- (b) Zeige, dass im Schwerpunktsystem die Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene liegen.
- (c) Nach dem Stoß fliegen die drei Teilchen im Schwerpunktsystem mit gleicher Geschwindigkeit auseinander. Gebe (im Schwerpunktsystem) die Geschwindigkeit und den Winkel zwischen den Flugrichtungen an.
- (d) Wenn die Ebene, in der die Teilchen im Schwerpunktsystem auseinanderfliegen, senkrecht auf der Einflugrichtung steht, wie groß ist dann der Winkel zwischen der Flugrichtung eines Teilchens nach dem Stoß und der Einflugrichtung im Laborsystem?