Übungen zu Physik I, Hausübung 7

Dozenten: Prof. Dr. Herbert Pfnür, Prof. Dr. Luis Santos
Übungsleiter: Tammo Block, Markus Otto, Jochen Zahn
Abgabe: Dienstag, 24.11.2009 vor der Vorlesung

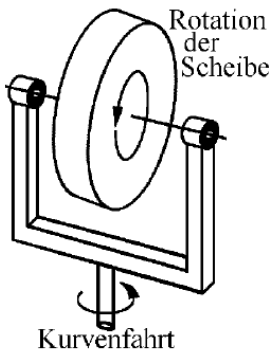
[H26] *Kreisel* **(1 + 1 + 1 = 3 Punkte)**

Schnell drehende Scheiben wurden im Automobilbereich als Energiespeicher diskutiert[1]. Die Idee dabei ist, dass beim Bremsen die Energie in einer rotierenden Scheibe gespeichert wird und zum anschließenden Beschleunigen wieder zur Verfügung steht.

(a) Betrachten wir für unser Beispiel eine massive Stahlscheibe mit 1 Meter Durchmesser und einer Dicke von 20 Zentimetern. Wie schnell muss eine solche Scheibe rotieren, um die Energie eines 30 Tonnen schweren Busses aufzunehmen, der aus einer Fahrt von 90 km/h zum Stand abgebremst wird? (Hinweis: Die Dichte des Stahls beträgt 7.6 g/cm^3.)

(b) In Anbetracht des Ergebnisses von Aufgabenteil (a.) fragt man sich, ob die Scheibe überdimensioniert ist. Berechnen Sie daher zum Vergleich die Rotationsfrequenz die benötigt wird, um die Energie einer Talfahrt aufzunehmen, bei der 1000 Höhenmeter überwunden werden.

(c) Die in den Aufgabenteilen (a.) und (b.) gezeigten Berechnungen erscheinen realisierbar. Dass rotierende Scheiben dennoch nicht als Energiespeicher in Fahrzeugen eingesetzt werden, hat seinen Grund unter anderem in der Präzessionsbewegung. Berechnen Sie hierzu das Drehmoment, das auf die Lager der Scheibe wirkt, wenn sie die in Aufgabenteil (b.) beschriebene Rotation vollführt und der Bus dann in eine Kurve fährt, bei der er binnen 5 Sekunden mit konstanter Winkelgeschwindigkeit eine Drehung um 90° vollzieht. (siehe Skizze).



[H27] *Integrale* **(1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)**

(a) Berechne Stammfunktionen für

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^5}{\sqrt{1 + x^3}}.$$

(b) Zeige mit Hilfe partieller Integration, dass

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \sin(mx)\sin(nx) = \frac{n^2}{m^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ \sin(mx)\sin(nx)$$

gilt. Was folgt daraus für $|m| \neq |n|$?
Es gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Lässt sich damit das Integral für $|m| = |n|$ berechnen?
Bitte wenden!

[1] In Bussen wurden sie auch sporadisch eingesetzt: http://de.wikipedia.org/wiki/Gyrobus. Seit dieser Saison werden sie offenbar auch in der Formel 1 verwendet: http://www.autobild.de/artikel/formel-1-saison-2009_849298.html

(c) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Berechne die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x^n e^{-\alpha x^2}$$

für natürliche Zahlen n. (Tipp: Verwende Differenzieren nach Parameter bzw. argumentiere mit Symmetrieeigenschaften)

(d) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in einer Dimension die Bewegungsgleichung durch

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \; \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}}$$

gelöst wird. Zeige, dass dies für $V(x) = -F_0 x$ zu den bekannten Lösungen

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{F_0}{2m}(t - t_0)^2$$

führt. Was ist v_0?

(e) Die Strahlungsenergie in einem Hohlraum mit Volumen V ist gegeben durch

$$E = \frac{V}{\pi^2} \int \mathrm{d}k \; k^2 \frac{\hbar c k}{e^{\frac{\hbar c k}{k_B T}} - 1},$$

wobei T die Temperatur und c, $\hbar$ und k_B Konstanten sind. Mit welcher Potenz von T wächst die Energie? (Tipp: Substituiere schlau. Das Integral selbst muss dann gar nicht berechnet werden.)

[H28] <u>*Kanal*</u> **(1 + 1 = 2 Punkte)**

Ein Kanal soll den Querschnitt

$$h(x) = h_0 \frac{|x|}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

erhalten (das Wasser befindet sich dabei oberhalb von $h(x)$, siehe Skizze).

(a) Gebe die gefüllte Querschnittschnittsfläche (d.h. die schraffierte Fläche in der Skizze) in Abhängigkeit von d an.

(b) Wie groß kann die gefüllte Querschnittsfläche maximal werden? (Hinweis: Betrachte den Grenzwert $d \to \infty$.) Bei welchem d wird die Hälfte der maximalen Füllmenge erreicht?