Übungen zu Physik I, Präsenzübung 7

Dozenten: Prof. Dr. Herbert Pfnür, Prof. Dr. Luis Santos
Übungsleiter: Tammo Block, Markus Otto, Jochen Zahn **24./25. November 2009**

[P18] *Gravitationspotenzial einer Kugelschale*

Das Gravitationspotenzial einer homogenen Kugel mit Dichte ϱ, Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung ist an der Stelle $\vec{r}'$ gegeben durch

$$V(\vec{r}') = \int_0^R \mathrm{d}r\ r^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\ \frac{-G\varrho}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

Uns interessiert zunächst die Integration über die beiden Winkel bei festem r, d.h. die Integration über eine Kugelschale. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems hängt das Potenzial nur vom Abstand r' zum Koordinatenursprung ab. Wir können somit o.B.d.A. $\vec{r}' = (0,0,r')$ wählen.

(a) Zeige, dass sich das Integral dann schreiben lässt als

$$V(\vec{r}') = \int_0^R \mathrm{d}r\ r^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\ \frac{-G\varrho}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}}.$$

(b) Führe nun die Integration über die beiden Winkel durch, d.h. für festes r. (Tipp: Substitution $x = \cos\theta$.) Wie verhält sich die Lösung für $r' < r$ und $r' > r$?

(c*) Berechne das Gravitationspotenzial der homogenen Kugel, d.h. führe die Integration über r durch. Diskutiere die Form des Potenzials für $r' < R$ und $r' > R$.

[P19] *Mehrdimensionale Integrale*

(a) Berechne das Volumen des durch

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le x \le y \le z \le 1\}$$

definierten Körpers.

(b) Ein Salzstreuer sei rotationssymmetrisch um seine vertikale Achse, habe Höhe H und der horizontale Abstand des Randes zur Symmetrieachse sei für $z \in [0,H]$ durch

$$\rho(z) = A(1 - e^{\frac{z-H}{B}})$$

gegeben. Wie groß ist sein Volumen?

(c) Zur Herleitung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

gibt es einen Trick: Bilde das Quadrat der linken Seite:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-\alpha x^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ e^{-\alpha(x^2+y^2)}.$$

Berechne dies in Polarkoordinaten!