Aufgabe 1 (2 Punkte)

Betrachten Sie ein stark verdünntes Gas in einer 3-dimensionalen Kiste, die in z-Richtung von $z = 0$ bis $z = L \gg 1$ ausgedehnt ist, bei der Temperatur T und unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes. Benutzen Sie die Theorie des kanonischen Ensembles, um die Wahrscheinlichkeit $P(z)\ dz$ dafür zu finden, dass man ein Teilchen in der Schicht $[z, z + dz]$ findet, für $z > 0$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben Sei ein nicht-wechselwirkendes Gas N ultra-relativistischer Teilchen in einem 3-dimensionalen Volumen V bei der Temperatur T. Der Hamilton-Operator lautet in diesem Fall $H = \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i|$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist.

1. Berechnen Sie die Zustandssumme Z und den Logarithmus davon. Die Rechnung wird vereinfacht dadurch, daß die Teilchen nicht miteinander wechselwirken.
2. Finden Sie den Erwartungswert der Energie und vergleichen Sie diesen mit dem des nicht-relativistischen idealen Gases.
3. Kalkulieren Sie den Druck des Gases.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

In einem zeitunabhängigen magnetischen Feld, das in z-Richtung orientiert ist ($\vec{B} = B\vec{z}$) befinde sich eine Substanz von N Spin-J Teilchen mit der Temperatur T. Wie in den anderen Aufgaben können Sie annehmen, daß die Teilchen nicht miteinander wechselwirken. Wir wollen desweiteren annehmen, daß sich alle Spins in einem Eigenzustand der z-Komponente des Spin Operators befinden. Dann ist der Hamilton-Operator eines einzelnen Spin-J im gegebenen magnetischen Feld gegeben durch

$$H = -\mu_z B, \quad \mu_z = g\mu_0 m_J,$$

wobei g der Landé-Faktor der Teilchen ist, μ_0 das Bohr'sche Magneton und m_J die Werte $-J, -J + 1, \ldots, J - 1, J$ annehmen kann.

1. Berechnen Sie mit Hilfe des kanonischen Ensembles die Magnetisierung $M = N\langle\mu_z\rangle$ als Funktion von $\eta \equiv g\mu_0 B/(k_B T)$. Die Identität $\sum_{k=0}^{n} x^k = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$ für $x \neq 1$ sollte helfen, das Ergebnis zu vereinfachen.
2. Betrachten Sie die Grenzfälle für sehr kleine und sehr große Temperaturen T:
   - Wie verhält sich die Magnetisierung für $T \to 0$?
   - Die magnetische Suszeptilität χ einer Substanz ist definiert als $M = \chi|\vec{B}|$. Wie hängt χ von T ab für $T \gg 1$?

   Hinweis: Betrachten Sie das Grenzverhalten von M als Funktion von η. Für $T \gg 1$ entwickeln Sie M bis zur ersten Ordnung in η.