Aufgabe 1 (1 Punkt)

Gegeben seien N Teilchen und g Boxen. Wie viele unterschiedliche Verteilungen gibt es, wenn die Teichen (i) ununterscheidbar und Fermionen, oder (ii) ununterscheidbar und Bosonen sind?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Betrachten Sie den drei-dimensionalen harmonischen Oszillator mit der Frequenz ω für ein Teilchen der Masse m.

- Betrachten Sie den klassischen Fall. Berechnen Sie die kanonische Partitionsfunktion und damit die freie Helmholtzenergie, die interne Energie und die Entropie.
- Jetzt betrachten Sie den quantenmechanischen Oszillator. Berechnen Sie auch hier die kanonische Partitionsfunktion und damit die freie Helmholtzenergie, die interne Energie und die Entropie.
- Vergleichen Sie das klassische mit dem quantenmechanischen Resultat für die freie Helmholtzenergie in dem Fall, daß die Grösse $\hbar\omega/k_BT$ sehr klein ist. Wie interpretieren Sie das Ergebnis?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben seien zwei Spin-1/2 Teilchen in einem magnetischen Feld. Jedes der beiden Teilchen kann in einem der beiden Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ sein (oder in einer linearen Superposition der beiden). Der Hamiltonian Operator für dieses System sei gegeben durch

$$\hat{H} = J\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + h(\hat{s}_1^z + \hat{s}_2^z) = J \sum_{i=x,y,z} s_1^i \otimes s_2^i + h(\hat{s}_1^z \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \hat{s}_2^z),$$

wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix eines einzelnen Systems ist und $\vec{s} = (\hat{s}^x, \hat{s}^y, \hat{s}^z) = \frac{1}{2}\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ gilt. Die Einträge des letzten Vektors sind die familiären Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Nehmen Sie an, daß $J > 0$ und $h \geq 0$ gilt.

Teil A (3 von 6 Punkten)

- Schreiben Sie den Hamilton-Operator aus in der zwei-Teilchen Basis $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ und bestimmen Sie dessen Eigenwerte und Eigenvektoren. Was ist der Grundzustand (Zustand mit der kleinsten Energie)?
- Schreiben Sie die Dichtematrix der möglichen Grundzustände auf und berechnen Sie deren Zeitentwicklung. Was ist die zeitlich gemittelte Dichtematrix $\bar{\rho} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(t)$ (für $T \to \infty$)?

- Betrachten Sie nun die Dichtematrix des reinen Zustands $|\uparrow\downarrow\rangle$, berechnen Sie dessen Zeitentwicklung und bestimmen sie auch hier die zeitlich gemittelte Dichtematrix.

- Gegeben Sei nun der gemischte Zustand (erinnern Sie sich an den Unterschied zwischen reinen und gemischten Zuständen), der zu 50% aus Zuständen $|\uparrow\downarrow\rangle$ und zu 50% aus Zuständen $|\downarrow\uparrow\rangle$ besteht. Finden Sie wiederum die zeitlich gemittelte Dichtematrix.

Teil B (3 von 6 Punkten)

Die Entropie einer Dichtematrix ρ ist gegeben durch $S = -k_B \cdot \mathrm{Spur}[\rho \ln \rho]$.

- Benutzen Sie die Tatsache, daß die Spur einer Matrix unabhängig von der Repräsentation ist, um zu zeigen, daß $S = -k_B \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$ gilt, wobei λ_i die Eigenwerte von ρ sind.

- Berechnen Sie die Entropien von Anfangszustand und zeitlichem Mittel für die Fälle (i) der Anfangszustand ist der Grundzustand, und (ii) der Anfangszustand ist $|\uparrow\downarrow\rangle$ mit Hilfe der Resultate aus Teil A.