Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir wollen ein ideales Gas von H_2-Molekülen im vibrationalen und elektronischen Grundzustand betrachten (in dem der Gesamtelektronenspin gleich Null ist). Weil die Protonen Spin 1/2 Teilchen sind, kann der Gesamtspin des Kerns $S = 1$ (Ortho-H_2, mit einer symmetrischen Protonspin-Wellenfunktion) und $S = 0$ (Para-H_2 mit einer anti-symmetrischen Protonspin-Wellenfunktion) sein. Ortho- and Para-H_2 unterscheiden sich aus Symmetriegründen in der Rotationsenergie. Der Hamilton-Operator für den starren Rotor ist $\hat{H}_{rot} = \hat{L}^2/2I$, wobei I das Trägheitsmoment des Moleküls ist und $\hat{L}$ der Drehimpulsoperator. Also sind die Eigenzustände von $\hat{H}_{rot}$ gegeben durch $E_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$, und zwar unabhängig von der Quantenzahl m (welche die Eigenzustände von $\hat{L}_z$ charakterisiert). Weil die Gesamtwellenfunktion (Ort + Spin) anti-symmetrisch sein muß bezüglich des Austausches zweier Protonen, sind nur ungerade Werte von l möglich in Ortho-H_2 und gerade l in Para-H_2.

Untersuchen Sie H_2-Moleküle einer gegebenen Temperatur T mit der Boltzmann-Statistik.

- Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme des Systems.
- Was ist das Verhältnis N_{ortho}/N_{para} zwischen den Gesamtpopulationen von Ortho- und Para-H_2?
- Was passiert bei grosser Temperatur T?
- Was passiert bei kleiner Temperatur T?

(Hinweis: Hier ist es wichtig, die richtigen Entartungen der Zustände mit der gleichen Energie zu berechnen (Protonspin- und Bahndrehimpuls-Entartung).)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

- Zeigen Sie, daß die Fluktuationen $(\Delta n_i)^2 \equiv \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2$ der Population eines gegebenen Niveaus i der Energie ϵ_i in einem idealen (Fermi-, Bose- oder Boltzmann-) Gas gegeben sind durch
$$(\Delta n_i)^2 = \frac{-1}{\beta} \frac{\partial \langle n_i \rangle}{\partial \epsilon_i},$$
- Berechnen Sie $(\Delta n_i)^2$ für Fermionen, sowohl als Funktion von $\{\beta, \mu, \epsilon_i\}$ als auch als Funktion von $\langle n_i \rangle$.
- Führen Sie die gleiche Rechnung für ein Boltzmann-Gas durch, und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem des Fermi-Gases.
- Skizzieren Sie $(\Delta n_i)^2$ als Funktion von ϵ_i. Wie interpretieren Sie das Resultat? Wie verhalten sich die Fluktuationen für Fermionen, wenn die Temperatur gegen Null geht?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Gegeben sei ein Quantensystem mit den Einteilchen-Energieniveaus ϵ_α, wobei α ein Satz charakteristischer Quantenzahlen sei. Betrachten Sie ein Fermi-Gas von Spin-1/2 Teilchen in diesem System, und nehmen Sie an, daß jedes der Niveaus entweder nicht besetzt sein kann, oder besetzt von einem Teilchen mit $m = 1/2$ oder einem Teilchen mit $m = -1/2$, aber nicht mit zwei Teilchen mit $m = 1/2$ und $m = -1/2$ zur gleichen Zeit. Wie in der ersten Aufgabe ist m hier die Quantenzahl, die die Eigenzustände von L_z charakterisiert.

- Berechnen Sie die groß-kanonische Zustandssumme für dieses System.
- Finden Sie die durchschnittliche Besetzungszahl $\langle n_\alpha \rangle$ eines Niveaus der Energie ϵ_α.
- Skizzieren Sie $\langle n_\alpha \rangle$ als Funktion von ϵ_α für kleine und für grosse Temperaturen. Vergleichen Sie die Resultate mit denen der Standard-Fermi-Verteilung.