Aufgabe 1 (3 Punkte)

Für ein Fermigas gilt $\lambda_{dB}^3/v = f_{3/2}(z)$ und

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2}+1}.$$

Wir wollen in dieser Aufgabe das Verhalten von $f_{3/2}(z)$ für große $z \gg 1$ untersuchen. Dabei sei $z = e^\nu$, also $\nu = \beta\mu$.

- Zeigen Sie mit Hilfe der partiellen Integration, daß $f_{3/2}(z)$ geschrieben werden kann als
$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy \frac{y^{3/2}e^{y-\nu}}{(e^{y-\nu}+1)^2}.$$
- Entwickeln Sie $y^{3/2}$ um ν und benutzen Sie, daß $\nu \gg 1$ gilt (weil $z \gg 1$), um zu zeigen, daß
$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(I_0\nu^{3/2} + \frac{3}{2}I_1\nu^{1/2} + \frac{3}{8}I_2\nu^{-1/2} + \cdots)$$
gilt, wobei $I_n \equiv \int_{-\infty}^\infty \frac{t^n e^t}{(e^t+1)^2}$.
- Zeigen Sie, daß $I_n = 0$ gilt für ungerade Werte von n.
- Vergleichen Sie den gefundenen Ausdruck für $I_0 = 1$ und $I_2 = \pi^2/3$ mit dem in der Vorlesung gegebenen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

- Berechnen Sie die Entropie eines idealen Fermigases (ohne Spin) im freien Raum als eine Funktion von β, z und den Energieniveaus $\epsilon_{\vec{p}}$. (Sie können die Summen hinschreiben, ohne sie zu lösen).
- Drücken Sie die Entropie als Funktion der Durchschnittsbesetzung $\langle n_{\vec{p}}\rangle$ aus. Schreiben Sie sie in der Form $S = \sum_{\vec{p}} S_{\vec{p}}$, wobei $S_{\vec{p}}$ der Beitrag zur Entropie vom Niveau mit Impuls $\vec{p}$ ist.
- Skizzieren Sie, wie $S_{\vec{p}}$ von $|\vec{p}|$ abhängt. Was folgern Sie aus der Skizze?
- Zeichnen Sie die Gesamtentropie S für $T/T_F \ll 1$ (mit Maple, Mathematica, ...). Sie sollten sehen, daß S linear von T/T_F abhängt. Was denken Sie, warum das so ist? (Hinweis: Erinnern Sie sich an die qualitative Diskussion über die Abhängigkeit von C_V von T aus der Vorlesung).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie ein zweidimensionales ideales System freier Elektronen.

- Berechnen Sie die Fermienergie ϵ_F als Funktion der Oberflächendichte $\sigma = N/S$, wobei S die Oberfläche ist.
- Kalkulieren Sie das chemische Potential μ als eine Funktion von T und σ, und skizzieren Sie dann μ in Einheiten von T/T_F.
- Finden Sie für $T/T_F \ll 1$ die erste Korrektur $f(T/T_F)$ zum chemischen Potential für Temperaturen grösser Null: $\mu/\epsilon_F = 1 + f(T/T_F)$.