Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 1

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels ist,

$$m_t l\ddot{\varphi} = -m_g g \sin(\varphi)\,. \tag{1}$$

Hier sind m_t und m_g die träge bzw. schwere Masse des Massenpunktes, l die Fadenlänge, g die Gravitationsbeschleunigung und φ der Auslenkwinkel. Ein Punkt bezeichnet wie üblich die Zeitableitung.

Berechnen Sie die Periode T_* für kleine Auslenkwinkel, also mit der Näherung $\sin(\varphi) \approx \varphi$.

Berechnen Sie die Periode nun allgemein. Leiten Sie dazu aus (1) den Energieerhaltungssatz ab

$$\frac{m_t}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_g g l(1-\cos\varphi) = m_g g l(1-\cos\alpha)\,, \tag{2}$$

wo α den Maximalauschlag bezeichnet. Fühern Sie nun statt φ die neue Variable ψ ein gemäß

$$\sin(\varphi/2) = \sin(\alpha/2)\cdot\sin(\psi) \tag{3}$$

und zeigen Sie, dass die Periode nun gegeben ist durch

$$T(\alpha) = T_* \cdot K(\alpha) \tag{4a}$$

mit

$$K(\alpha) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\,\sin^2(\psi)}} \tag{4b}$$

und

$$k := \sin(\alpha/2)\,. \tag{4c}$$

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von P1.

Die α-abhängigen Korrekturen zur genäherten Schwingungsdauer T_* (gültig für kleine Amplituden) können störungstheoretisch berechnet werden, indem die Wurzel im Integanden von (4b) nach Potentzen von $k = \sin(\alpha/2)$ entwickelt und das Integral summandenweise ausgeführt wird.

Zeigen Sie so, dass in führender Ordnung 2 Punkte

$$\frac{T(\alpha)-T_*}{T_*} \approx \tfrac{1}{4}\sin^2(\alpha/2)\,. \tag{5}$$

Berechnen Sie damit die über N Schwingungen akkumulierte Differenz der Perioden einer Amplitude $\alpha = 25°$ zu einer Amplitude $\alpha = 2,5°$. 1 Punkt

Vergleichen Sie dies mit folgender berühmten Schilderung, die Galilei in seinem letzten Buch, der *Discorsi*, von 1638 gibt:

> „*[...] endlich habe ich zwei Kugeln genommen, eine aus Blei und eine aus Kork, jene gegen 100 mal schwerer als diese, und habe beide an zwei gleiche feine Fäden von 4 bis 5 Ellen Länge befestigt und aufgehängt; [...] Man bemerkt wohl einen Einfluss des Mediums, welches einen Widerstand darbietet der Bewegung und weit merklicher die Schwingungen der Kork-Kugel vermindert, als die des Bleies, aber dadurch werden sie nicht mehr oder minder häufig, selbst wenn die vom Kork zurückgelegten Bögen nur 5 oder 6 Grad betragen, und die des Bleies 50 oder 60 Grad, sie werden sämtlich in ein und derselben Zeit zurückgelegt [...] so dass weder in 100 noch in 1000 Schwingungen die kleinste Verschiedenheit zu merken war.*“

Kann das sein? [„Never trust an experiment unless verified by theory!“] Nach spätestens wie vielen Schwingungen hätte sich bei den geschilderten Verhältnissen ein Phasenunterschied von π eingestellt? Argumentieren Sie genau, denn Galileis Angaben sind u.U. mehrdeutig. 2 Punkte

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Ein Massenpunkt bewege sich gemäß

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{k}{r^3}\vec{x} \tag{6}$$

mit $k = konst > 0$ und $r := \|\vec{x}\|$. Zeigen Sie, dass die drei Größen

$$e \;=\; \tfrac{1}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2 - k/r\,, \tag{7a}$$

$$\vec{\ell} \;:=\; \vec{x}\times\dot{\vec{x}}\,, \tag{7b}$$

$$\vec{\varepsilon} \;:=\; k^{-1}\,\dot{\vec{x}}\times\vec{\ell} - \vec{n}\,, \tag{7c}$$

zeitunabhängig (erhalten) sind, wobei $\vec{n} := \vec{x}/r$. Zeigen Sie weiter folgende Beziehungen

$$\vec{\ell}\cdot\vec{x} \;=\; 0\,, \tag{8a}$$

$$\vec{\ell}\cdot\vec{\varepsilon} \;=\; 0\,, \tag{8b}$$

$$r + \vec{x}\cdot\vec{\varepsilon} - k^{-1}\ell^2 \;=\; 0\,, \tag{8c}$$

$$1 - \varepsilon^2 + 2e\,\ell^2/k^2 \;=\; 0\,, \tag{8d}$$

wobei $\varepsilon := \|\vec{\varepsilon}\|$ und $\ell := \|\vec{\ell}\|$.

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von P2.

Bestimmen Sie aus (8c) die Form der Bahn $r(\varphi)$ als Funktion von e und ℓ, wobei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{\varepsilon}$ ist. Um welche geometrischen Kurven handelt es sich und was ist die geometrische Bedeutung des Vektors $\vec{\varepsilon}$? Wie sind die geometrischen Charakteristika der Bahnen durch e und ℓ bestimmt? Berechnen Sie für ungebundene Bahnen auch den Streuwinkel als Funktion von e und ℓ bzw. der Geschwindigkeit v_∞ im Unendlichen und des Stoßparameters b. 3 Punkte

Zeigen Sie, dass der Hodograph (also die Kurve $t \mapsto \dot{\vec{x}}(t) \in \mathbb{R}^3$) auf dem Kreis mit Mittelpunkt $\ell^{-2}k\,\vec{\ell} \times \vec{\varepsilon}$ und Radius k/ℓ in der Ebene senkrecht zu $\vec{\ell}$ liegt. [Tipp: Sie können (7c) nach $\dot{\vec{x}}$ auflösen (warum?), z.B. durch vektorielle Multiplikation mit $\vec{\ell}$.] 2 Punkte

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

Ein Massenpunkt bewege sich in der Ebene $z = 0$ des $\mathbb{R}^3$, die man sich wie üblich zunächst durch die Basisvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ aufgespannt denken kann. Alternativ kann man außerhalb des Ursprungs der Ebene aber auch eine vom Punkt der Ebene abhängige Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ verwenden, wobei in Polarkoordinaten gilt

$$\vec{e}_r(\varphi) := \cos(\varphi)\,\vec{e}_x + \sin(\varphi)\,\vec{e}_y\,, \tag{9a}$$
$$\vec{e}_\varphi(\varphi) := -\sin(\varphi)\,\vec{e}_x + \cos(\varphi)\,\vec{e}_y\,. \tag{9b}$$

Sei $t \mapsto \vec{x}(t)$ eine Bahn in der betrachteten Ebene. Setzen Sie $\vec{x}(t) = r(t)\vec{e}_r\big(\varphi(t)\big)$ und berechnen Sie durch Differenzieren nach t die r- und φ-Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. Zeigen Sie, dass die φ-Komponente der Beschleunigung genau dann verschwindet, wenn

$$\ell := r^2\dot{\varphi} \tag{10}$$

zeitunabhängig ist.

Zeigen Sie weiter: Bewegt sich die Punktmasse m unter Einfluss einer nur vom Abstand r abhängigen Zentralkraft $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x})f(r)$, mit $r := \|\vec{x}\|$, dann gilt

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r)\,. \tag{11}$$

Leiten Sie daraus und dem Vorhergehenden folgende Gleichung ab, indem Sie $u = 1/r$ als abhängige und φ als unabhängige Variable einführen ($u' := du/d\varphi$ etc.):

$$f(1/u) = -m\ell^2u^2(u'' + u)\,. \tag{12}$$

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung von P3.

Bestimmen Sie mit Hilfe von (12) die Zentralkraftfelder, die zu folgenden Bahnkurven führen (ε und a seien positive Konstante): je 1 Punkt

$$u(\varphi) \;=\; 1 + \varepsilon \cos(\varphi)\,, \tag{13a}$$
$$r(\varphi) \;=\; 2a\,\cos(\varphi)\,, \tag{13b}$$
$$r(\varphi) \;=\; a\,\exp(-\varphi)\,, \tag{13c}$$
$$r(\varphi) \;=\; a\sqrt{2\cos(2\varphi)}\,. \tag{13d}$$

Um welche geometrischen Kurven (oder Stücke davon) handelt es sich? (Sie haben alle bekannte Namen.) 1 Punkt