Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

☞ Weihnachtsaufgabe: Alle BX - Aufgaben ergeben Bonuspunkte! ☜

von Domenico Giulini

Blatt 10

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Kurze Wiederholung aus der Vorlesung: Die Poisson-Klammer auf $C^\infty(T^*Q)$ wurde definiert durch $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$, wobei z.B. $df = i_{X_f}\omega$ mit $\omega = -d\theta$ und $\theta_\lambda := \lambda \circ \pi_{*\lambda}$. Hier bezeichnet $\pi_{*\lambda}$ dass Differential $(*)$ der Projektionsabbildung $\pi : T^*Q \to Q$ am Punkt $\lambda \in T^*Q$. Sei (x, U) eine lokale Karte auf Q und (z, V) ihre kanonische Fortsetzung auf $V = \pi^{-1}(U)$ mit $(z^1, \cdots, z^{2f}) = (q^1, \cdots, q^f, p_1, \ldots, p_f)$ und $q^a(\lambda) := x^a(\pi(\lambda))$ bzw. $p_a(\lambda) := \pi_{*\lambda}(\partial/\partial x^a|_\lambda)$. Man nennt dann die f lokalen Funktionen p_a die zu den f lokalen Funktionen q^a *kanonisch konjugierten Impulsvariable*. Lokale Koordinaten $(z^1, \cdots, z^{2f})$ auf T^*Q, bei denen der erste Satz von f Funktionen die Form $z^a = q^a := x^a \circ \pi$ $(1 \leq a \leq f)$ hat, wobei x^a lokale Koordinaten auf Q sind, und der zweite Satz die kanonisch konjugierten Impulsvariable bildet, heißen *kanonische Koordinaten*.

Zeigen Sie unter Benutzung der obigen Definitionen der Poisson-Klammer, dass kanonische Koordinaten $(q^1, \cdots, p_f)$, die folgenden Relationen erfüllen:

$$\{q^a, q^b\} = 0\,, \quad \{p_a, p_b\} = 0\,, \quad \{q^a, p_b\} = \delta^a_b\,. \tag{1}$$

H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen in Koordinaten, dass die Relationen (1) beispielsweise auch für neue Koordinaten q'^a und p'_a gelten, sofern diese definiert werden durch

$$q^a \mapsto q'^a := F^a(q)\,, \qquad p_a \mapsto p'_a := (F^{-1})^c_a(q)p_c\,, \tag{2a}$$

$$q^a \mapsto q'^a := q^a\,, \qquad p_a \mapsto p'_a := p_a + \sigma_a(q)\,, \tag{2b}$$

wobei $(F^{-1})^c_a(q)$ die Inverse der Jacobi-Matrix $\partial F^c(q)/\partial q^a$ ist und $\sigma(q) = \sigma_a(q)dq^a$ eine geschlossene 1-Form ist, die nur von den Variablen q abhängt.

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Zeigen Sie, dass alle Hamilton'schen Vektorfelder (HVF) divergenzfrei im folgenden Sinne sind: Seien $z = (z^1, \cdots, z^{2f}) = (q^1, \cdots, q^f, p_1, \ldots, p_f)$ kanonische Koordinaten und $H \in C^\infty(T^*Q)$ mit zugehörigem HVF $X_H = X^a_H \partial/\partial z^a$ (Summation über a

von $1, \cdots, 2f$); dann $\partial X_H^a / \partial z^a = 0$. Also ist der Fluss von X_H im Koordinatengebiet $V \subset T^*Q$ volumenerhaltend; bezüglich welchen Maßes?

Für Differentialgeometrie-Interessierte: Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist der geometrischen Aussage $L_{X_H}\omega^f = 0$, mit L = Lie-Ableitung und $\omega^f = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (f-fach äußeres Produkt), was wiederum äquivalent ist der Geschlossenheit der $(2f-1)$ Form $\eta_H := i_{X_H}\omega^f$, d.h. $d\eta_H = 0$.

H2 (Hausübung, 5 Punkte)

V sei ein Vektorfeld auf T^*Q mit $L_V\theta = 0$. Zeigen Sie $V = X_f$ (Hamilton'sches Vektorfeld) mit $f = \theta(V)$.

Seien nun V, W zwei Vektorfelder mit $L_V\theta = 0 = L_W\theta$. Zeigen Sie

$$\big\{\theta(V), \theta(W)\big\} = -\theta\big([V, W]\big)\,. \tag{3}$$

H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Sei $Q = \mathbb{R}^3$ mit globalen kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) und $L_a : T^*Q \to \mathbb{R}$ gegeben durch $L_a = \varepsilon_{abc}q^b p^c$, wobei $q^a = x^a \circ \pi$ und $p^a = \delta^{ab}p_b = p_a$ die dazu konjugierten Impulse (vgl. Aufgabe P1). Zeigen Sie ($L^c = \delta^{cd}L_d = L_c$)

$$\{L_a, L_b\} = \varepsilon_{abc}L^c\,. \tag{4}$$

Aufgabe B1 (5 Bonuspunkte)

Ein System von N Punktmassen m_a ($1 \leq a \leq N$) bewege sich unter Einfluss des Potentials $V : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$m_a\ddot{\vec{x}}_a = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a}\,. \tag{5}$$

Dabei haben wir inertiale Koordniaten gewählt. Sei I_s die Trägheitsabbildung des Systems bezüglich des Schwerpunkts. Wir wählen das inertiale Koordinatensystem so, dass der Schwerpunkt im Koordinatenursprung ruht. Das ist möglich, wenn das Potential V invariant ist unter Galilei-Boosts, was wir voraussetzen wollen. Darüberhinaus nehmen wir an, dass V eine homogene Funktion vom Grade k ist, dass also gilt $V(\lambda\vec{x}_1, \cdots, \lambda\vec{x}_N) = \lambda^k V(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass 1 Punkt

$$\mathrm{Spur}(I_s) = 2\sum_{a=1}^{N} m_a\vec{x}_a \cdot \vec{x}_a \tag{6}$$

und 2 Punkte

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Spur}(I_s) = 8E - (8+4k)V\,, \tag{7}$$

wobei $E = T + V$ die (erhaltene) Gesamtenergie ist.

Ist $V < 0$ und $k > -2$, so ist die rechte Seite für Lösungen mit $E > 0$ echt positiv und somit die Funktion $t \mapsto \mathrm{Spur}(I_s(t))$ konvex. Folgern Sie daraus, dass das System der N Teilchen für $E > 0$ Lösungen für $t \to \infty$ in keinem beschränkte Raumgebiet verweilen wird, d.h. mindestens ein Teilchen dieses Gebiet verlassen wird. Zeigen Sie, dass dies den Fall enthält, in dem V das Newton'sche Gravitationspotential der N Massen ist. 1 Punkt 1 Punkt

Aufgabe B2 (5 Bonuspunkte)

Ein mechanisches System sein beschrieben durch die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} g_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b - U(q) \tag{8}$$

wobei $q = (q^1, \cdots, q^f)$.

Das sogenannte *Maupertuis'sche Prinzip der kleinsten Wirkung* (Maupertuis 1747; Leibniz soll es bereits 1707 formuliert haben) besagt, dass die dynamisch mögliche Bahn des Systems zwischen den Endpunkten q_0 und q_1, deren Energie E sei, der Bedingung genügt, dass sie unter allen kinematisch möglichen Bahnen gleicher Endpunkte und gleicher Energie die Maupertuis'sche „Wirkung“ (das ist der Ursprung des Begriffs *Wirkung*),

$$W := \int p_a(q, \dot{q})\dot{q}^a \, dt \tag{9}$$

minimiert, wobei $p_a := \partial L / \partial q^a$.

Beachten Sie, dass hier die Vergleichsbahnen wegen der Bedingung gleicher Energie nicht in gleicher Zeit durchlaufen werden können (im Unterschied zum Hamilton'schen Wirkungsprinzip). Zeigen Sie, dass vielmehr dt durch die dq^a determiniert ist durch

$$dt = \sqrt{\frac{g_{ab}\, dq^a\, dq^b}{2(E - U)}}\,. \tag{10}$$

Zeigen Sie, indem Sie damit alle Differentiale dt in (9) eliminieren, dass das Maupertuis'sche Prinzip die (Jacobi'sche) Form annimmt, gemäß der die dynamisch möglichen Bahnen die stationären Punkte des Funktionals 2 Punkte

$$W = \int \sqrt{G_{ab}(q(\lambda))\frac{dq^a(\lambda)}{d\lambda}\frac{dq^b(\lambda)}{d\lambda}} \tag{11a}$$

sind, wobei

$$G_{ab}(q) := 2\big(E - U(q)\big)\, g_{ab}(q) \tag{11b}$$

Dabei ist λ ein beliebiger Parameter der kinematisch erlaubten Vergleichskurve $\lambda \mapsto q(\lambda)$.

Geben Sie eine geometrische Interpretation der Stationaritätsbedingung für (11) an. Diese enthält keine Zeit mehr. Wie aber kann man die tatsächlich vergangene Newton'sche Zeit zurückbekommen, wenn die Lösungskurve zu (11) einmal gefunden ist? 1 Punkt

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Stationarität des Jacobi- 2 Punkte

Funktionals (11) auf und zeigen Sie, dass Lösungskurven, wenn sie durch $\lambda = t$ parametrisiert werden, die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Langrange-Funktion (8) erfüllen.

Aufgabe B3 (5 Bonuspunkte)

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes in der xy-Ebene unter Einfluss einer nur vom Abstand abhängenden Zentralkraft. Die Bahnkurve stellen wir diesmal durch eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion $t \mapsto z(t)$ dar, wobei $z := x + iy = re^{i\varphi}$. Das Kraftgesetz für eine mit der a-ten Potenz des Abstands skalierende Kraft und der Flächensatz lauten dann (wir dividieren gleich durch die Masse; c ist eine reelle Konstante)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -c\, z\, |z|^{a-1}\,, \tag{12a}$$

$$|z|^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell = \mathrm{konst.} \tag{12b}$$

Leiten Sie aus (12a) den Energiesatz ab: 1 Punkt

$$E := \frac{1}{2}\left|\frac{dz}{dt}\right|^2 + \frac{c}{a+1}|z|^{a+1} = \mathrm{konst.} \tag{13}$$

Beweisen Sie nun folgenden 2 Punkte

Satz 1. *Genügt die Kurve* $t \mapsto z(t)$ *den Gleichungen* (12) *mit Energiewert* E*, dann genügt für ein reelles* r *die Kurve*

$$\tau \mapsto \zeta(\tau) := z^r(t(\tau)) \tag{14}$$

den entsprechenden Gleichungen

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = -\gamma\, \zeta\, |\zeta|^{\alpha-1}\,, \tag{15a}$$

$$|\zeta|^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \ell = \mathrm{konst.} \tag{15b}$$

mit der gleichen Konstanten ℓ*, wenn*

$$r = \frac{a+3}{2}\,, \quad \gamma = E\frac{(a+3)(a+1)}{2}\,, \quad (\alpha+3)(a+3) = 4\,. \tag{16}$$

Tipp: Man beachte, dass der neue Kurvenparameter τ *nicht mit* t *übereinstimmt sondern durch die Forderung festgelegt ist, dass der Flächensatz mit gleicher Konstante* ℓ *gelten soll. Zeigen Sie zuerst, dass daraus folgt*

$$\frac{d}{d\tau} = |z(t)|^{-2(r-1)}\frac{d}{dt}\,. \tag{17}$$

Werten Sie damit und mit (14) $d^2\zeta/d\tau^2$ *aus und bringen Sie das Ergebnis unter Benutzung des Energiesatzes* (13) *in die Form* (12a).

Diskutieren Sie das Beispiel $a = 1$ (zweidimensionaler harmonischer Oszillator) das 2 Punkte nach (16) mit $r = 2$ zu $\alpha = -2$, also dem Keplerproblem korrespondiert. Zeigen Sie dazu, dass die komplexe Darstellung einer Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung unter Quadrieren wieder in die Darstellung einer Ellipse übergeht, deren einer Brennpunkt nun im Ursprung liegt.

Tipp: Der Kreis $\hat{z}(\varphi) = Re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ *mit* $1 < R = \text{konst.}$ *geht unter der Abbildung* $\hat{z} \mapsto z := \hat{z} + 1/\hat{z}$ *über in die Ellipse* $z(\varphi) = a\cos(\varphi) + b\sin(\varphi)$ *mit großer und kleiner Halbachse* $a = R + R^{-1}$ *bzw.* $a = R - R^{-1}$ *und Mittelpunkt im Ursprung. Die Brennpunkte liegen also bei* $z = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm 2$*. Quadrieren von* $z(\varphi)$ *ergibt* $z(\varphi) \mapsto \zeta(\varphi) := z^2(\varphi) = \hat{z}^2(\varphi) + 1/\hat{z}^2(\varphi) + 2$*, also die Darstellung einer um die Strecke* $\Delta z = 2$ *verschobenen Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung und Halbachsen* $a' = R^2 + R^{-2}$ *bzw.* $b' = R^2 - R^{-2}$.