Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 11

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \tag{1}$$

für den eindimensionalen Harmonischen Oszillator auf, für den gilt (m und ω sind Konstante):

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2 \,. \tag{2}$$

Lösen Sie diese durch den Ansatz $S(q,\alpha,t) = W(q) - \alpha t$ und bestimmen Sie $W(q)$ durch Integration. Welche Interpretation hat die Konstante α?

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die in Aufgabe P1 gefundene Lösung $S(q,\alpha,t)$ ein vollständiges Integral ist; d.h., dass $\partial^2 S/\partial q \partial\alpha \neq 0$. 1 Punkt

Berechnen Sie aus der Lösung $S(q,\alpha,t)$ aus Aufgabe P1 die Phasenraumtrajektorie $\gamma(t) = \big(q(t), p(t)\big)$ zu den Anfangsbedingungen $\gamma(0) = \big(q_0, p_0\big)$ gemäß $\partial S/\partial\alpha = \beta \Rightarrow q = q(\alpha,\beta,t)$ und $\partial S/\partial q|_{q=q(\alpha,\beta,t)} = p(\alpha,\beta,t)$ (vgl. Vorlesung). 4 Punkte

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Die Lagrange-Funktion eines Teichens im sphärisch-symmetrischen Kraftfeld mit Potential V lautet in spährischen Polarkoordinaten

$$L(r,\theta,\varphi,\dot r,\dot\theta,\dot\varphi) = \frac{m}{2}\big(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot\varphi^2\big) - V(r)\,. \tag{3}$$

Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi)$ und stellen Sie die Hamiton-Jacobi Gleichung auf. Zeigen Sie, dass Sie letztere durch den *Separations-Ansatz*

$$S((r,\theta,\varphi) = W_1(r) + W_2(\theta) + W_3(\varphi) - \alpha_1 t \tag{4}$$

lösen können, indem Sie zeigen, dass dieser zu jeweils einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktionen W_1, W_2 und W_3 führt, die neben α_1 zwei weitere Konstante α_2 und α_3 enthalten.

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Führen Sie die Berechnung von Aufgabe P2 weiter, indem Sie die Integrale für W_1, W_2 und W_3 anschreiben. 1 Punkt

Das Integral für W_3 können Sie sofort ausführen; es ergibt $W_3(\varphi) = \alpha_3\varphi$. Berechnen Sie nun nach dem allgemeinen Schema (vgl. Vorlesung) die Ausdrücke $\partial S/\partial\alpha^a = \beta_a$, aus denen – im Prinzip – die Bahnen $q(\alpha, \beta, t)$ im Konfigurationsraum folgen. 2 Punkte

Drücken Sie die drei Konstanten α_1, α_2 und α_3 als Funktion der Energie, p_φ und des Drehimpulsquadrats aus. Welche Bedeutung haben die drei weiteren Konstanten β_1, β_2 und β_3? 2 Punkt

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Geben Sie für folgende integrable Systeme die f (= Anzahl der Freiheitsgrade) unabhängigen, involutiven Phasenraumfunktionen an:

- Der 1-dimensionale harmonische Oszillator (2). 1 Punkt
- Der 4711-dimensionale harmonische Oszillator, 2 Punkte

$$H(q,p) = \sum_{a=1}^{4711} \left(\frac{p_a^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 (q^a)^2 \right) . \tag{5}$$

- Das System (3). 2 Punkte