Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 13

Vorbereitendes

Als $(n+1)$-dimensionalen Minkowskiraum bezeichnen wir den $(n+1)$-dimensionalen reellen affinen Raum $(M, V, +, \eta)$ dessen zugehöriger $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum mit der symmetrischen, nicht-ausgearteten Bilinearform η der Signatur $(1, n)$ („Minkowski-Metrik“) versehen ist. Wir schreiben abkürzend $\eta(v, w) := v \cdot w$. Für eine angepasste Basis $\{e_0, e_1, \cdots e_n\}$ gilt dann

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu} := \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1}$$

Wir schreiben $v^2 := v \cdot v$ und definieren eine „Minkowski Norm“

$$\|v\|_\eta := \sqrt{|v \cdot v|} \tag{2}$$

die natürlich keine Norm im eigentlichen Sinne ist (warum nicht).

Ein Vektor v heisst *zeit-*, *licht-* oder *raumartig*, je nachdem $v^2 > 0$, $= 0$ oder < 0 ist. Der Nullvektor wird meist mit zu den lichtartigen Vektoren gerechnet. Ein Vektor $\neq 0$ heißt kausal, wenn er entweder zeit- oder lichtartig ist. Ein linearer Unterraum $W \subset V$ heißt raumartig, lichtartig, oder zeitartig, je nachdem $\eta\big|_W$ negativ definit, nicht negativ definit aber negativ semidefinit, oder aber indefinit ist. Das Orthokomplement eines Vektors $v \neq 0$ ist der Unterraum

$$v^\perp := \{w \in V : v \cdot w = 0\}. \tag{3}$$

Er ist n dimensional und zeit-, licht- oder raumartig, falls v raum-, licht- bzw. zeitartig ist. Beachten Sie: Ist v lichtartig so ist $\{v\} \cap v^\perp = \{v\}$, andernfalls ist der Durchschnitt trivial (nur der Nullvektor).

Die Relation $v \sim w \Leftrightarrow v \cdot w > 0$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der zeitartigen Vektoren mit zwei Äquivalenzklassen. Diese nennt man „Zeitorientierungen“. Zwei zeitartige Vektoren v, w haben also die gleiche oder entgegengesetzte Zeitorientierung, je nachdem $v \cdot w > 0$ oder < 0 gilt.

P1 (Präsenzübung)

In einem Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt folgt bekanntlich aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$v^2 w^2 \geq (v \cdot w)^2 \tag{4}$$

die Dreiecksungleichung

$$\|v\| + \|w\| \geq \|v + w\| , \tag{5}$$

wobei Gleichheit in (4) und (5) genau dann gilt, wenn v und w linear abhängig bzw. parallel ($v = \lambda w$ mit $\lambda > 0$) sind. Wie oben betrachte man nun den Vektorraum V ($n > 2$) mit indefinitem Skalarprodukt (1). Zeigen Sie, dass für linear unabhängige v, w nun die folgenden modifizierten Cauchy-Schwarz-Ungleichungen gelten:

$$v^2 w^2 \star (v \cdot w)^2 , \quad \text{wobei} \star \begin{cases} > & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ raumartig} , \\ = & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ lichtartig} , \\ < & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ zeitartig} . \end{cases} \tag{6}$$

Überlegen Sie sich mögliche Dreiecksungleichungen als Folge von (6) mit der verallgemeinerten „Norm“ (2). Zeigen Sie insbesondere, dass für zeitartige Vektoren v, w gleicher Zeitorientierung (d.h. $v \cdot w > 0$) die „umgekehrte Dreiecksungleichung“ gilt:

$$\|v + w\|_\eta > \|v\|_\eta + \|w\|_\eta . \tag{7}$$

Sie ist manchmal Grundlage des sogenannten „Zwillingsparadoxons“.

H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Sei nun $n > 2$; zeigen Sie: Die strenge „umgekehrte“ Cauchy-Schwarz-Ungleichung 2 Punkte

$$v^2 w^2 < (v \cdot w)^2 \tag{8}$$

gilt für festes v genau dann für jeden Vektor $w \in V$ der linear unabhängig zu v ist, wenn v zeitartig ist. [*Tipp: Zerlegen Sie w in seine Komponenten parallel und orthogonal zu v.*]

Wir betrachten nun eine Gerade durch einen Punkt $r \in M$ in Richtung v:

$$G_r(v) := \{r + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}, \tag{9}$$

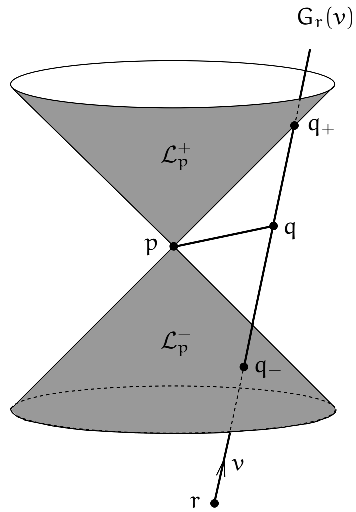
und den Lichtkegel mit Vertex am Punkte $p \notin G_r(v)$:

$$\mathcal{L}_p := \{x \in M \, : \|x - p\|_\eta = 0\} . \tag{10}$$

Zeigen Sie: Ist v zeitartig, so existieren immer genau zwei Schnittpunkte. Ist hingegen v lichtartig, so existiert genau ein Schnittpunkt falls $(p - r) \notin v^\perp$ und kein Schnittpunkt falls $(p - r) \in v^\perp$. 3 Punkte

P2 (Präsenzübung)

$G_r(v)$ sei eine zeitartige Gerade durch r in Richtung v (vgl. (9)) und $\mathcal{L}_p$ der Lichtkegel mit Vertex an einem Punkt $p \notin G_r(V)$ (vgl. (10)). Wie in Aufgabe 4 gezeigt, schneidet die Gerade den Lichtkegel in zwei Punkten q_+ und q_-. Sei q ein beliebiger Punkt auf $G_r(n)$ zwischen q_+ und q_-; siehe Abbildung.



Zeigen Sie:

$$\|p-q\|_\eta^2 = \|q_+ - q\|_\eta \cdot \|q - q_-\|_\eta \,. \tag{11}$$

Dieser Sachverhalt entspräche einem Analogon des Höhensatzes in der Euklidischen Geometrie, wenn $p - q$ orthogonal zur Geraden $G_r(v)$ stünde, das ist aber nicht gefordert. Die Beziehung (11) gilt für *jedes* q zwischen q_+ und q_- !

[*Tipp: Die Vektoren* $(q_+ - p) = (q-p)+(q_+ - q)$ *und* $(q_- - p) = (q-p)+(q_- - q)$ *sind lichtartig. Also gilt*

$$\|q-p\|_\eta^2 \;=\; (q_+ - q)^2 + 2(q-p)\cdot(q_+ - q)\,, \tag{12}$$
$$\|q-p\|_\eta^2 \;=\; (q_- - q)^2 + 2(q-p)\cdot(q_- - q)\,. \tag{13}$$

Nutzen Sie, dass $q_+ - q$ *und* $q - q_-$ *parallel sind, woraus folgt, dass ein* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *existiert mit* $q_+ - q = \lambda(q - q_-)$. *Multiplizieren Sie nun* (13) *mit* λ *und addieren Sie das zu* (12).]

H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Zeigen Sie direkt im Anschluss an Aufgabe P2: $p - q$ steht genau dann orthogonal zu $G_r(v)$, d.h. $(p-q)\cdot v = 0$, wenn q in der Mitte zwischen q_+ und q_- liegt. Also sind gemäß der *Einstein'schen Synchronisationsvorschrift* alle bezüglich v zu q gleichzeitigen Ereignisse gegeben durch $q + v^\perp$, d.h. die zu $G_r(v)$ orthogonale Hyperfläche durch q. 2 Punkte

Betrachten Sie nun zwei zueinander windschiefe zeitartige Geraden

$$G_r(v) \;:=\; \big\{ r + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R} \big\}\,, \tag{14a}$$
$$G_{r'}(v') \;:=\; \big\{ r' + \lambda' v' : \lambda' \in \mathbb{R} \big\}\,. \tag{14b}$$

„Windschief“ bedeutet, dass die Geraden schnittfremd ($G_r(v) \cap G_{r'}(v') = \emptyset$) und nicht parallel ($v, v'$ linear unabhängig) sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $v^2 = v'^2 = 1$.

Zeigen Sie: Es gibt genau ein Paar $(p, p') \in G_r(v) \times G_{r'}(v')$, so dass p' gleichzeitig zu p bezüglich v und p gleichzeitig zu p' bezüglich v' ist. 3 Punkte

H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Ein Punktteilchen bewege sich im Minkowski-Raum $(M, V, +, \eta)$ entlang der „Weltlinie“ (zeitartige Kurve im Minkowski-Raum) $\mathbb{R} \ni \tau \to x(\tau) \in M$, wobei der Parameter τ die Eigenzeit sei, d.h. die mit dem Faktor $1/c$ (c = Lichtgeschwindigkeit) reskalierte Eigenlänge. Die erste τ-Ableitung $\dot{x}(\tau) := dx(\tau)/d\tau$ ergibt dann das entlang der Wetlinie definierte Feld der „Vierergeschwindigkeit“ $\mathbb{R} \ni \tau \to u(\tau) := \dot{x}(\tau) \in V$, eine weitere Ableitung das ebenfalls entlang der Wetlinie definierte Feld der „Viererbeschleunigung“ $\mathbb{R} \ni \tau \to a(\tau) := \ddot{x}(\tau) \in V$, usw.

Zeigen Sie, dass 1 Punkt

$$u \cdot u \;=\; c^2\,, \tag{15a}$$
$$u \cdot a \;=\; 0\,, \tag{15b}$$
$$u \cdot a \;=\! -a \cdot a\,. \tag{15c}$$

$u^{\perp}(\tau) = \big\{ v \in V : v \cdot u(\tau) = 0 \big\} subset V$ nennt man den zum Weltlinienpunkt $x(\tau)$ gehörigen momentanen Ruheraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung der η-orthogonalen Projektion $P_\tau : V \to u^{\perp}(\tau)$ gegeben ist durch 1 Punkt

$$P_\tau(v) = v - u(\tau)\big(u(\tau) \cdot v\big)/c^2\,. \tag{16}$$

Man sagt die Weltlinie $\tau \to x(\tau)$ sei „von konstanter Beschleunigung“ genau dann, wenn $P_\tau\big(\dot{a}(\tau)\big) = 0$. Zeigen Sie, dass Weltlinien konstanter Beschleunigung durch folgende Differentialgleichung charaktersiert sind: 1Punkt

$$\ddot{u} + u\;(\dot{u} \cdot \dot{u})/c^2 = 0\,. \tag{17}$$

Seien $u_0, \dot{u}_0$ die Anfangswerte, zeigen Sie, dass die Lösungskurve $u(\tau)$ in der zeitartigen Ebene $\mathrm{Span}\{u_0, \dot{u}_0\} \subset V$ verlaufen wird. Führt man in dieser Ebene eine angepasste affine Basis ein, so kann man wegen (15a) in Komponenten schreiben: $u(\tau) = c\big(\cosh(\phi(\tau))\,,\, \sinh(\phi(\tau))\big)$. Bestimmen Sie das allgemeine $\phi(\tau)$ aus (17) und damit alle zeitartigen Weltlinien konstanter Beschleunigung. 2 Punkte