Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 14

In dieser letzten Präsenzübung soll am Beispiel des Kepler-Problems diskutiert werden, dass bereits die Ersetzung des Newton'schen Ausdrucks für die kinetische Energie durch den speziell-relativistischen Energieausdruck zu weitreichenden mathematischen und physikalischen Folgerungen führt, die ohne detailierte Rechnung nicht leicht zu erraten gewesen wären.

Finale Präsenzübung

Teil 1

Die speziell-relativistische Langrangefunktion für ein Teilchen der Ruhemasse m_0 in einem nur von $r = \|\vec{x}\|$ abhängigen Potential ist bezogen auf die Koordinaten $(t, \vec{x})$ des Interialsystems, in dem das Kraftzentrum ruht, gegeben durch

$$L(\vec{x}, \vec{v}) = -m_0 c^2 / \gamma(v) - V(r)\,, \tag{1}$$

mit

$$\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}\,, \quad \vec{v} := d\vec{x}/dt\,, \quad v := \|\vec{v}\|\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass Energie und Drehimpuls erhalten und durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$E = m_0 c^2 \gamma(v) + V(r)\,, \tag{3}$$

$$\vec{L} = m_0 \gamma(v)\, \vec{x} \times \vec{v}\,. \tag{4}$$

Wie im Newton'schen Fall reichen diese Erhaltungssätze aus, um das Problem durch Quadraturen zu lösen. Beobachten Sie dazu, dass die Bewegung stets in einer Ebene verläuft, und dass die Energie und der ebene Drehimpuls Erhaltungsgrößen sind. [Diese stehen im Hamilton'schen Sinne in Involution, also haben verschwindende Poisson-Klammer. Wie kann man das sofort ohne Rechnung einsehen?.]

Führen Sie nun ebene Polarkoordinaten (r, φ) ein. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls in der Bewegungsebene dann gegeben ist durch

$$L = m_0 \gamma(v) r^2\, d\varphi/dt\,. \tag{5}$$

In welchem Sinne bleibt das zweite Kepler'sche Gesetz für Zentralkräfte bestehen, dass der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht?

Tipp: Mit „Zeiten" könnte dt *oder die Eigenzeit* $d\tau = \gamma^{-1} dt$ *gemeint sein. Was bietet sich an?*

Benutzen Sie die Erhaltungssätze für E und L um erst eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $r(t)$ und dann für $u(\varphi)$ (mit $u := 1/r$) aufzustellen.

Tipp: Das scheint zunächst wegen der viel komplizierteren Abhängigkeit des Drehimpulses von der Geschwindigkeit nicht so einfach möglich zu sein wie im Newton'schen Fall, wo einfach $\dot{\varphi} = L/mr^2$ mit konstantem m. Hier gehen Sie am besten so vor: Es ist $[(E - V)/(mc^2)]^2 = \gamma^2 = 1 + \gamma^2\beta^2$. Jetzt ersetzen Sie in $\beta^2 = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \dot{\varphi}^2\big((dr/d\varphi)^2 + r^2\big)$ das $\dot{\varphi}$ durch $L/(m_0\gamma r^2)$, so dass sich der störende Faktor γ^2 herauskürzt.

Spezialisieren Sie nun auf den Fall eines attraktiven $1/r$–Potentials

$$V(r) = -\frac{K}{r}\,, \quad \text{mit} \quad K > 0\,. \tag{6}$$

Die damit erhaltene Gleichung für $u' = du/\varphi$ ist von der Form

$$u'^2 + au^2 - 2bu = c\,. \tag{7}$$

Bestimmen Sie a, b und c als Funktion von E, L und K. (Natürlich kommt auch die Lichtgeschwindigkeit c vor, die wir absichtlich nicht gleich 1 setzen, um später den Limes $1/c \to 0$ bilden zu können). Die Integration von (7) kann entweder direkt durch Separation der Variablen vorgenommen werden, oder wie folgt (empfohlener Weg): Nochmalige Differentiation nach φ zeigt, dass Bahnen mit $u' \neq 0$ der *linear-inhomogenen* Gleichung

$$u'' + au = b \tag{8}$$

genügen müssen. Deren allgemeine Lösung ist die Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Für letztere müssen Sie nach $a > 0$ (1. Fall) und $a < 0$ (2. Fall) unterscheiden. Wählen Sie im 1. Fall die eine Integrationskonstante so, dass $r = r_{\text{min}}$ (Periastron) für $\varphi = 0$. Die zweite Integrationskonstante bestimmen Sie, indem Sie die Lösung von (8) zurück einsetzten in (7). ((8) ist ja nur notwendig aber nicht hinreichend für (7).)

Teil 2

Zeigen Sie, dass eine zwischen $0 < r_{\text{min}} < r < r_{\text{max}} < \infty$ pendelnde Lösung nur existiert, falls der Drehimpuls oberhalb einer endlichen Schranke bleibt:

$$L > K/c\,. \tag{9}$$

Erklären Sie, warum die Existenz dieser Schranke einen wesentlichen Unterschied zum Kepler-Problem in der Newton'schen Mechanik darstellt.

Werten Sie (9) für zwei Beipiele aus:

1. Beispiel: $K = GMm_0$; entsprechend eines *naiv* in die SRT übertragenen Gravitationsgesetzesgestzes (was aus Gründen, die hier nicht diskutiert werden können, problematisch ist, wie nächstes Semester in der ART-Vorlesung diskutiert werden wird). Zeigen Sie, dass (9) dann äquivalent ist zu

$$L > r_* \cdot m_0 c\,, \quad \text{mit} \quad r_* := \frac{GM}{c^2}\,, \tag{10a}$$

oder

$$\left(\frac{r \cdot d\varphi/d\tau}{c}\right) \cdot \left(\frac{r}{r_*}\right) > 1\,. \tag{10b}$$

Diskutieren Sie mögliche physikalische Bedeutungen dieser Ungleichungen.

2. Beispiel: $K = Ze^2/4\pi\varepsilon_0$; ensprechend dem Coulomb-Potential eines Kerns der Ladungszahl Z, um den sich ein Elektron bewegt. Zeigen Sie, dass (9) dann äquivalent ist zu

$$\alpha \cdot Z < L/\hbar\,, \tag{11}$$

wobei $\alpha := e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante ist. (Eigentlich hat die Planck'sche Konstante $\hbar$ in dieser rein klassischen Argumentation nichts verloren und kann auch wieder herausgekürzt werden. Mit ihr kann man aber beide Seiten dimensionslos schreiben. In der Quantenmechanik ist der Bahndrehimpuls L ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$.) Diskutieren Sie mögliche physikalische Bedeutungen dieser Ungleichung in der Atomphysik, insesondere betreffend den Einfluss der SRT auf die Existenz stabiler Zustände mit $L = \hbar$ bei hohen Kernladungszahlen.

Teil 3

Die oben erhaltene allgemeine Lösung von (8) liefert

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\omega\varphi)}\,. \tag{12}$$

Geben Sie die Größen p, ε und ω als Funktion von E, L und K an und zeigen Sie, dass diese in in führender Ordnung in $1/c$ in die Newton'schen Werte übergeht

$$p_N = \frac{L^2}{m_0 K}\,, \tag{13a}$$

$$\varepsilon_N = \sqrt{1 + \frac{2E_n L^2}{m_0 K^2}}\,, \tag{13b}$$

$$\omega_N = 1\,. \tag{13c}$$

Hier ist E_N die Newton'sche Gesamtenergie, die von der speziell-relativistischen um die Ruheenergie differiert: $E = m_0 c^2 + E_N$.

Unter der *Periastronpräzession pro Umlauf* versteht man die Differenz $\Delta\varphi$ des Winkels zweier aufeinanderfolgenden Periastrondurchgänge zu 2π. Berechnen Sie diesen als Funktion von L und$K$. Zeigen Sie, dass diese in führender Ordnung in $1/c$ gegeben ist durch

$$\Delta\varphi = \pi \cdot \frac{K/p}{m_0 c^2}\,. \tag{14}$$

Im Falle der Gravitation ist $K = GMm_0$. Das ergibt $1/6$ des Einstein'schen Wertes, den die Allgemeine Relativitätstheorie voraussagt und der am Planeten Merkur zuerst bestätigt wurde. Beachte zum Vergleich mit oft zitierten Ausdrücken, dass $p = a(1-\varepsilon^2)$ wobei a die große Halbachse der ungestörten Ellipse ist. Machen Sie eine qualitative Zeichnung der Bahnkurve.