Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 2

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Wir betrachten ein (Newton'sches) Kraftfeld, das nach Basiswahl durch eine Funktion $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$, repräsentiert wird. Von einer möglichen Zeitabängigkeit wollen wir hier absehen. Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ trage die übliche euklidische Metrik, in der die Standardbasis orthogonal ist, so dass die Drehungen durch die Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ implementiert werden.

Zeigen bzw. argumentieren Sie, dass Kraftfelder unter Drehungen wie folgt transformieren,

$$T_D : \vec{F} \to T_D(\vec{F}) := D \circ \vec{F} \circ D^{-1} \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass dies eine Aktion der Gruppe $SO(3)$ auf der Menge der Kraftfelder definiert.

Zeigen Sie nun, dass ein unter allen Drehung invariantes Kraftfeld, das also für alle $D \in SO(3, \mathbb{R})$ die Gleichung erfüllt $T_D(\vec{F}) = \vec{F}$, notwendig von der Form ist

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x})\, f(r) \,, \tag{2}$$

mit $r := \|\vec{x}\|$ und $\vec{n}(\vec{x}) := \vec{x}/r$. Tipp: Überlegen Sie sich die Implikation von $DF(D^{-1}\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$ für alle Drehungen D, die $\vec{x}$ als Fixpunkt besitzen.

P2 (Präsenzübung)

Es seien X und Y zwei Mengen auf denen jeweils Aktionen derselben Gruppe G definiert sind, also Abbildungen $\phi : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \phi_g(x)$, und $\psi : G \times Y \to Y$, $(g, y) \mapsto \psi_g(y)$, so dass $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{g \cdot h}$ mit $\phi_e = \mathrm{id}_X$ und $\psi_g \circ \psi_h = \psi_{g \cdot h}$ mit $\psi_e = \mathrm{id}_Y$.

Zeigen Sie, dass dann auch eine Aktion der Gruppe G auf der Menge $\mathrm{Map}(X, Y)$ der Abbildungen von X nach Y definiert ist, gemäß:

$$\begin{aligned} T : G \times \mathrm{Map}(X, Y) &\to \mathrm{Map}(X, Y) \\ (g, F) &\to T_g F := \psi_g \circ F \circ \phi_g^{-1} \,. \end{aligned} \tag{3}$$

Warum ist die inversion von ϕ_g notwendig? Was bedeutet (3) für den Graphen der Abbildung F?

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

In der Vorlesung wurde eine Newton-Galilei Raumzeit definiert als ein vierdimensionaler reeller affiner Raum $(M, V, +)$ mit folgenden zwei weiteren Strukturelementen: $\tau \in V^*$ und $h \in \big[\mathrm{Ker}(\tau)\big]^* \otimes \big[\mathrm{Ker}(\tau)\big]^*$.

Zeigen Sie, dass die Linearform τ auf M eine Äquivalenzrelation gemäß $p \sim q \Leftrightarrow \tau(p-q) = 0$ definiert, deren Äquivalenzklassen gegeben sind durch $[p] = p + \mathrm{Ker}(\tau) := \{p + v : v \in \mathrm{Ker}(\tau)\}$.

Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $Z := M/\!\sim$ ein eindimensionaler reeller affiner Raum über dem Vektorraum $V/\mathrm{Ker}(\tau)$ ist; dieser heißt die „Zeit" (warum?). Tipp: Die Aktion von $V/\mathrm{Ker}(\tau)$ auf $M/\!\sim$ ist $[p] + [v] = [p + v]$, wobei Sie zeigen müssen, dass diese wohldefiniert ist. Beachten Sie: $[p]$ ist die Äquivalenzlasse von $p \in M$ bezüglich der Relation $\sim$ während $[v] \in V/\mathrm{Ker}(\tau)$ die Äquivalenzklasse von $v \in V$ bezüglich der dort durch den Untervektorraum $\mathrm{Ker}(\tau) \subset V$ definierten Äquivalenzrelation ist.

Zeigen Sie, dass Z total geordnet und metrisch ist, wobei $[p] \geq [q] \Leftrightarrow \tau(p-q) \geq 0$ und $d\big([p], [q]\big) := |\tau(p-q)|$.

Zeigen Sie weiter, dass die Aktion $\phi : \mathrm{Gal} \times M \to M$ der Galilei Gruppe auf der Raumzeit eine Aktion $\phi^Z : \mathrm{Gal} \times Z \to Z$ auf der „Zeit" definiert, gemäß $\phi^Z_g([p]) := [\phi_g(p)]$. Dabei sind die Untergruppen $\mathrm{Gal}_{[p]} := \{g \in \mathrm{Gal} : \phi^Z_g([p]) = [p]\}$ (sogenannte „Stabilisatorgruppe" des Punktes $[p] \in Z$) alle identisch (von $[p]$ unabhängig) und gegeben durch die normale Untegruppe der Galileigruppe, in der alle Translationen aus $\mathrm{Ker}(\tau)$ sind. Beweisen Sie auch diese Aussagen.

H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Wir betrachten wieder den 3-dimensionalen rellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit euklidischem Skalarprodukt $\delta \in (\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)^*$. Sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eine orthonormierte und positiv orientierte Basis, für die also gilt $\delta(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \delta_{ab}$ („Kronecker-Delta") und $\vec{e}_a \times \vec{e}_b = \varepsilon_{ab}{}^c\, \vec{e}_c$.

Wir definieren 3 lineare Abbildungen $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ auf sich durch $\lambda_a(\vec{x}) := \vec{e}_a \times \vec{x}$.

Zeigen Sie, dass diese Abbildungen bezüglich des Skalarproduktes δ antisymmetrisch sind, d.h. gilt $\delta\big(\lambda_a(\vec{x}), \vec{y}\big) = -\delta\big(\vec{x}, \lambda_a(\vec{y})\big)$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, dass sie eine Basis des dreidimensionalen Vektorraums aller linearen antisymmetrischen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bilden und dass ihre Kommutatoren gegeben sind durch 2 Punkte

$$\big[\lambda_a\,,\, \lambda_b\big] = \varepsilon_{ab}{}^c\, \lambda_c\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie weiter, dass die Abbildungen 2 Punkte

$$D(\vec{\alpha}) := \exp(\alpha^a \lambda_a) \tag{5a}$$

bezüglich δ Drehungen um den Winkel $\alpha := \|\vec{\alpha}\|$ mit orientierter Drehachse $\vec{n} := \vec{\alpha}/\|\vec{\alpha}\|$ sind. Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass $\big(\alpha^a \lambda_a\big)^2 = -\alpha^2\, P_\perp$, wobei $P_\perp$ die Abbildung der orthogonalen Projektion auf das zu $\vec{n}$ orthogonale Komplement ist. Werten

Sie damit die Exponentialreihe (5a) aus, indem Sie gerade und ungerade Potenzen zusammenfassen. Zeigen Sie, dass Sie das Ergebnis so darstellen können:

$$D(\vec{\alpha}) := \big[1 - P_\perp\big] + \big[\cos(\alpha)\,\mathrm{id} + \sin(\alpha)\, n^a \lambda_a\big] \circ P_\perp\,. \tag{5b}$$

Machen Sie sich den Inhalt dieser Gleichung geometrisch klar, z.B. indem Sie sie auf $\vec{x}$ anwenden.

Angenommen die α^a hängen in einmal stetig differenzierbarer Weise von einem reellen Parameter s ab, wobei $\alpha^a(s=0) = 0$ und $\dot{\alpha}^a := d\alpha(s)/ds|_{s=0}$.

Zeigen Sie, dass dann 1 Punkt

$$\frac{dD\big(\alpha(s)\big)}{ds}\Big|_{s=0} = \dot{\alpha}^a \lambda_a\,. \tag{6}$$

Warum ist es richtig, dass *jede* antisymmetrische Abbildung in dieser Weise als Ableitung einer Drehung erhalten werden kann?

H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Verallgemeinern Sie die Aussage in Aufgabe P2 dahingehend, dass die Aktion der Gruppe G auf der Zielmenge Y nun auch von X abhängen darf. Die dortige Abbildung ψ wird also verallgemeinert zu einer Abbildung $\psi : G \times X \times Y \to Y$, $(g, x, y) \mapsto \psi_{(g,x)}(y)$, die folgende (von der Aktion ϕ abhängende!) Verallgemeinerung der Aktions-Bedingung erfüllt:

$$\psi_{(g\cdot h, x)} = \psi_{(g, \phi_h(x))} \circ \psi_{(h,x)}\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass dann folgende Verallgemeinerung von (3) ebenfalls eine Aktion von G auf $\mathrm{Map}(X,Y)$ definiert. 2 Punkte

$$\begin{aligned} T : G \times \mathrm{Map}(X,Y) &\to \mathrm{Map}(X,Y) \\ (T_g F)(x) &:= \psi_{(g, \phi^{-1}(x))}\big(F(\phi_g^{-1}(x))\big). \end{aligned} \tag{8}$$

Wenden Sie dies auf den Fall von Teilchentrajektorien $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ in der Newton'schen Punktmechanik an. Die Galileigruppe wirkt gesondert auf Zeit (siehe Aufgabe P3) und Raum, wobei aber die Wirkung auf dem Raum von der Zeit abhängt (das trifft für die Wirkung der Boosts zu). In Koordinaten wird die Zeit durch $t \in \mathbb{R}$ und der Raum durch $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ parametrisiert, so dass die Aktion des Elements $g(b, \vec{a}, \vec{v}, D) \in \mathrm{Gal}$ auf der Zeit durch $t \mapsto t + b$ und auf dem Raum zur Zeit t durch $\vec{x} \mapsto D\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}$ gegeben ist.

Geben Sie im vorliegenden Fall die Aktion der Galileigruppe auf den Trajektorien explizit an und zeigen Sie damit, dass diese *Symmetrien* (Def. siehe Vorlesung) des folgenden Systems von Bewegungsgleichungen von n Punktteilchen sind: 2 Punkte

$$\ddot{\vec{x}}_a(t) = \sum_{\substack{b=1\\ b\neq a}}^{n} \vec{x}_{ab}(t) f_{ab}(r_{ab}(t))\,, \qquad a \in \{1, \cdots, n\} \tag{9}$$

Dabei ist $\vec{x}_{ab} := \vec{x}_a - \vec{x}_b$ und $r_{ab} := \|\vec{x}_{ab}\|$. Machen Sie sich klar, dass insbesondere das Newton'sche gravitative n-Körperproblem darunterfällt. Wie lauten dann die Funktionen f_{ab}? Wie würden die Symmetrien verändert, wenn auf der rechten Seite noch ein konstantes äußeres Gravitationsfeld hinzukäme? 1 Punkt

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

In der *Discorsi* (1638), die bereits in Aufgabe H1 von Blatt 1 zur Sprache kam, gibt Galilei eine Überlegung an, die ihm scheinbar streng und ohne Verweis auf ein tatsächlich ausgeführtes Experiment schließen lässt, dass die Fallbeschleunigung eines Körpers im Gravitationsfeld der Erde (Reibungsverluste durch Luftwiderstand werden vernachlässigt) unabhängig von seiner Masse ist. Er argumentiert so: Gegeben zwei Körper K_1 und K_2 mit Massen $m_1 < m_2$. Wir nehmen an (*Ausgangsannahme*), die Schwerebeschleunigung wüchse monoton mit der Masse; dann fiele insbesondere K_2 schneller als K_1. Nun betrachte man den Körper K_3 der entsteht, indem man K_1 und K_2 aneinanderklebt (die Masse des Klebstoffs sei vernachlässigt). Nun müsste nach Voraussetzung, da $m_3 = m_1 + m_2 > m_2$, K_3 schneller als vorher K_2 fallen. Andererseits wird aber K_2 durch den angeklebten aber langsamer beschleunigten Körper K_1 an seiner ihm natürlich zukommenden Fallbeschleunigung gehindert, so dass K_3 mit einer Beschleunigung fallen sollte, die *zwischen* der von K_1 und K_2 liegt. Das ist aber ein Widerspruch, womit die Ausgangsannahme als falsch erwiesen ist. Somit muss die Schwerebeschleunigung *unabhängig* von der Masse sein.

Einfach genial – oder? Beurteilen Sie dieses Argument hinsichtlich möglicher versteckter Annahmen. 2 Punkte

Mit welcher Kraft drückt oder zieht ein Körper K der Masse m auf/an meine/r Handfläche (auf der er liegt bzw. festgeklebt ist), wenn ich diese im Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ der Erde mit der Beschleunigung $\vec{g}' = -g'\vec{e}_z$ bewege? Begründen Sie Ihre Antwort genau! 3 Punkte