Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

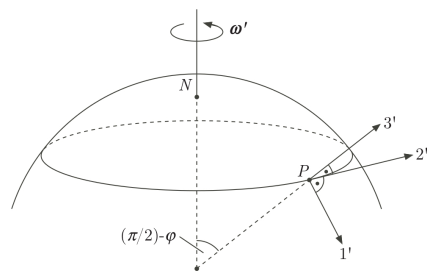
Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 3

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

In dieser Präsenzübung und der zugehörigen Hausübung H1 soll der freien Fall von der Spitze des Bremer Fallturms (siehe linkes Bild) diskutiert werden.



Beschreiben Sie dazu den Fall in einem mitbewegten Koordinatensystem gemäß Gleichung (14) des Anhangs, die in der Vorlesung abgeleitet wurde. Setzen Sie darin die träge Masse $m_t = m =$ *schwere Masse*. Ferner seien die beschleunigte Bewegung der Erde um die Sonne und die Zeitabhängigkeit ihrer Winkelgeschwindigkeit (z.B. Polschwankungen) vernachlässigt, nicht jedoch der Zentrifugalterm.

Machen Sie sich zunächst klar, dass die auf der Erde gemessene Fallbeschleunigung $\vec{g'}$ bereits die Summe aus dem gravitativen Anteil und dem Zentrifugalterm ist. Die Oberfläche des Geoids ist daher auch keine runde Sphäre sondern entlang der Polachse abgeplattet, so dass $\vec{g'}$ senkrecht auf dessen Oberfläche steht.

Führen Sie das auf der Erde mitbewegte, orthonormierte Achsensystem so wie im rechten Bild gezeigt ein, wobei Sie die Koordinaten der $1', 2'$ und $3'$ Richtung mit x', y' und z' bezeichnen. Die geographische Breite sei φ (s. Bild). Der Betrag des Vektors der Winkelgeschwindigkeit heiße ω, der Betrag der Summe aus gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung g_*.

Zeigen Sie dann, dass die Bewegungsgleichungen (14) äquivalent sind zu

$$\ddot{x}' = 2\omega \sin(\varphi)\, \dot{y}' \,, \tag{1a}$$

$$\ddot{y}' = -2\omega \sin(\varphi)\, \dot{x}' - 2\omega \cos(\varphi)\, \dot{z}' \,, \tag{1b}$$

$$\ddot{z}' = -g_* + 2\omega \cos(\varphi)\, \dot{y}' \,. \tag{1c}$$

Verifizieren Sie den Energiesatz

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\|\dot{\vec{x}'}\|^2 + g_* z'\right) = 0\,. \tag{2}$$

In der Regel ist die Energie in einem beschleunigten Bezugssystem nicht erhalten, warum also hier?

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Integrieren Sie das System (1) für die Anfangsbedingungen $x'(0) = y'(0) = 0$, $z'(0) = h > 0$ und $\dot{\vec{x}'}(t = 0) = \vec{0}$. [Tipp: Zur Entkoppelung können Sie zuerst (1a) und (1c) je einmal direkt integrieren und das Ergebnis in (1b) einsetzen. Die allgemeine Lösung für y' der so erhaltenen linear-inhomogenen Gleichung bekommen Sie nach dem Prinzip: „allgemeine lineare plus partikuläre Lösung". Nachdem Sie diese erhalten haben setzen Sie sie zurück in (1a) und (1c) ein und erhalten auch für x' und z' die Lösung.] 3 Punkte

Mit „Ost-" und „Südablenkung" bezeichnet man auf der nördlichen Hemisphäre den Versatz des Aufschlagpunktes auf dem Boden in östlicher bzw. südlicher Richtung relativ zum Abwurfpunkt. Berechnen Sie diese für die Gegebenheiten des Bremer Fallturms: Höhe 146 m, geographische Breite $\varphi = 53^\circ\, 4'\, 30''$. Wie verhält es sich bei einem freien Fall, bei dem der Körper anfänglich vom Erdboden aus mit einem Katapult senkrecht zur Erdoberfläche nach oben geschossen wird? (Ein solches Katapult ist im Bremer Fallturm eingebaut, womit die Freifallzeit auf knapp 10 Sekunden verdoppelt werden kann.) 2 Punkte

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Eine Punktmasse bewege sich unter Einfluss eines äußeren Kraftfeldes $\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v})$. Dabei wird es durch eine holonom-skleronome Zwangsbedingung auf die Fläche $\Sigma := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = 0\}$ gezwungen.

Zeigen Sie: Bewegt sich das Teilchen im Einklang mit den Bewegungsgleichungen am Ort $\vec{y} \in \Sigma$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ tangential zu Σ, so übt es dort eine Kraft auf die Fläche aus, die gegeben ist durch:

$$-\vec{Z}(\vec{y}, \vec{v}) = \left.\frac{\vec{\nabla} f(\vec{\nabla} f \cdot \vec{F}) + m v^a v^b f_{,a,b}}{\|\vec{\nabla} f\|^2}\right|_{\vec{x}=\vec{y}}. \tag{3}$$

Dabei steht $f_{,a,b}$ abkürzend für $\partial^2 f/\partial x^a \partial x^b$. [Tipp: Benutzen Sie, dass entlang einer Lösungskurve $\vec{x}(t)$ für alle t gilt $f\big(\vec{x}(t)\big) = 0$. Differenzieren nach t ergibt weitere Identitäten.] Können Sie das Ergebnis (3) auf holonom-rheonome Zwangsbedingungen verallgemeinern?

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Ein Auto fahre mit konstanter Geschwindigkeit v' in radialer Richtung auf einer horizontalen Kreisscheibe in Richtung wachsender Radien. Die Kreisscheibe dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vom Betrag ω um die Achse senkrecht zur Scheibenebene durch den Mittelpunkt relativ zu einem Inertialsystem.

Bestimmen Sie Richtung und Betrag der zur Scheibenebene parallelen Komponente der auf das Auto wirkenden Gesamtkraft. 2 Punkte

Sei μ der Haftreibungskoeffizient zwischen Reifen und Scheibe. Oberhalb eines kritischen Radius' r_* wird das Auto ins Rutschen kommen, und zwar in einer Richtung, die mit der radialen Richtung den Winkel α bildet.

Leiten Sie zwei Formel ab, die r_* und $\sin(\alpha)$ als Funktion von ω, v', g (Erdbeschleunigung) und μ ausdrücken. 2 Punkte

Berechnen Sie diese Größen für $\omega = 2\pi/\text{min}$, $v' = 80\,\text{km/h}$ und $\mu = 0,7$ (Gummi-Asphalt). 1 Punkt

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

Ein scharfkantiges Rad mit Radius R rollt ohne Schlupf und ohne Neigung (d.h. seine Achse ist stets parallel zur Ebene) über die xy-Ebene. Sei (ξ, η) der Berührpunkt des Rades mit der xy-Ebene, θ der Winkel, unter dem die Schnittgerade zwischen Rad- und xy-Ebene die x-Achse schneidet und φ der Rollwinkel des Rades, gezählt von einer beliebigen Anfangskonfiguration.

Argumentieren Sie anschaulich, dass jedes Werte-Quadrupel $(\xi, \eta, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$ eine mögliche Konfiguration des Systems beschreibt und dass umgekehrt diese Zuordnung eindeutig ist. Wie würden Sie beispielweise vorgehen, um aus einer bestehenden Konfiguration $(\xi, \eta, \theta, \varphi)$ eine anderen zu erzeugen, die sich nur um den Wert von φ unterscheidet?

Zeigen Sie, dass die Bedingung des schlupflosen Rollens äquivalent ist den Bedingungen

$$h_1 := d\xi - R\cos(\theta)\, d\varphi \;=\; 0\,, \tag{4a}$$
$$h_2 := d\eta - R\sin(\theta)\, d\varphi \;=\; 0\,. \tag{4b}$$

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Beweisen Sie auf drei Weisen, dass die Bedingungen (4) anholonom sind.

1. Beweis: Es ist nichts zu zeigen, da die Behauptung aus der evidenten Tatsache folgt (wie genau?), dass jedes Werte-Quadrupel $(\xi, \eta, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$ möglich ist. 1 Punkt

2. Beweis: Elementares Nachrechnen eines Widerspruchs. Gäbe es eine reellwertige Funktion $f(\xi, \eta, \theta, \varphi)$, deren nicht *identisch* verschwindendes Differential verschwindet, sobald (4) erfüllt ist, so müsste diese Funktion konstant sein, das Differential entgegen der Annahme also doch identisch verschwinden. [Tipp: Nehmen Sie das Differential df von f, eliminieren Sie darin $d\xi$ und $d\eta$ durch (4) und zeigen Sie mit Hilfe 2 Punkte

der Unabhängigkeit der verbleibenden Differentiale $d\theta$ und $d\varphi$, dass ein Verschwinden von df den besagten Widersprich liefert.]

3. Beweis: Benutzen Sie das Frobenius'sche Theorem, gemäß dem die Holonomizität von (4) äquivalent ist zu ($\wedge$ ist das äußere Produkt von Differentialformen): 2 Punkt

$$dh_1 \wedge h_1 \wedge h_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad dh_2 \wedge h_1 \wedge h_2 = 0\,. \tag{5}$$

Anhang: Wiederholung aus der Vorlesung

Sei $(M, V, +, \tau, h)$ eine Newton-Galilei Raumzeit und $K := \big(o\,,\ \{e_0, e_1, e_2, e_3\}\big)$ eine angepasste Basis (d.h. $\tau(e_0) = 1$, $\tau(e_a) = 0$ für $a \in \{1, 2, 3\}$ und $h(e_a, e_b) = \delta_{ab}$ für $a, b \in \{1, 2, 3\}$). Sei $\{\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ die Dualbasis zu $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Dann sind durch die affine Basis affine Koordinatenfunktionen $x^\alpha : M \to \mathbb{R}$ definiert durch $x^\alpha(p) := \theta^\alpha(p - o)$. Wir nennen x^0 eine *affine oder inertiale* Zeit- und $\vec{x} := \{x^1, x^2, x^3\}$ *affine oder inertiale* Raumkoordinaten.

Neben K führten wir in der Vorlesung noch eine einparametrige Schar $K'(t) := \big(o'(t)\,,\ \{e'_0(t), e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t)\}\big)$ weiterer angepasster affiner Basen ein, die wir hier durch einen Strich statt – wie in der Vorlesung – durch einen Hut kennzeichnen wollen. Diese Basen hängen vom Punkt $p \in M$ ab, aber nur durch die bereits eingeführte Koordinatenfunktion $t := x^0$. Entlang der Äquivalenzklassen $[p] = p + \mathrm{Ker}(\tau)$ sind diese also konstant.

Die Relativgeschwindigkeit v von K' bezüglich K ist die Projektion von e'_0 parallel zu e_0 auf $\mathrm{Ker}(\tau)$, also $v(t) = P_{e_0}\big(e'_0(t)\big) = e'_0 - e_0\tau(e'_0) = e'_0 - e_0$. Die „räumlichen" (d.h. in $\mathrm{Ker}(\tau)$ liegenden) Basisvektoren sind durch eine zeitabhängige $SO(3)$-Matrix $\{D^a{}_b(t)\}$ miteinander verbunden. Also gilt

$$e'_0(t) \;=\; e_0 + v = e_0 + v^a(t) e_a\,, \tag{6a}$$
$$e'_b(t) \;=\; D^a{}_b(t)\, e_a\,. \tag{6b}$$

Für die Dualbasen impliziert das

$$\theta'^0(t) \;=\; \theta^0\,, \tag{7a}$$
$$\theta'^a(t) \;=\; \big[D^{-1}(t)\big]^a{}_b\big(\theta^b - v^b(t)\,\theta^0\big)\,, \tag{7b}$$

so dass $\theta'^\alpha(e'_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. Außerdem gilt für den Ursprung von K':

$$o'(t) = o + te_0 + b^a(t) e_a \quad \text{mit} \quad \dot{b}^a = v^a\,. \tag{8}$$

Damit sind die von t abhängigen Koordinatenfunktion in K' gegeben durch

$$x'^0(p) \;:=\; \theta'^0(t)(p - o'(t)) = \theta^0(p - o - te_0 - b^a(t)e_a) = x^0(p) - t\,, \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} x'^a(p) \;&:=\; \theta'^a(t)(p - o'(t)) \\ &=\; [D^{-1}(t)]^a{}_b(\theta^b - v^b(t)\theta^0)(p - o - te_0 - b^a(t)e_a) \\ &=\; [D^{-1}(t)]^a{}_b\Big(x^b(p) - v^b(t)\big(x^0(p) - t\big) - b^b(t)\Big) \end{aligned} \tag{9b}$$

Aufgelöst nach den ungestrichen (inertialen) Koordinaten hat man

$$x^0(p) = x'^0(p) + t\,, \tag{10a}$$

$$x^a(p) = D^a{}_b(t)x'^b(p) + v^a(t)x'^0(p) + b^a(t)\,. \tag{10b}$$

Sei nun $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine durch t parametrisierte Kurve in M, dann ist $x^\alpha(t) := x^\alpha \circ \gamma(t) = (t, \vec{x}(t))$ und $x'^\alpha(t) := x'^\alpha \circ \gamma(t) = (0, \vec{x}'(t))$. Somit wird aus (10b)

$$\vec{x}(t) = D(t)\vec{x}'(t) + \vec{b}(t)\,. \tag{11}$$

Zweimaliges Differenzieren nach t berechnet man unter Benutzung der antisymmetrischen linearen Abbildung

$$\Omega(t) := \Omega'^a{}_b(t)e'_a(t) \otimes \theta'^b(t) \qquad \text{mit} \quad \Omega'^a{}_b(t) =: [D^{-1}(t)\dot{D}(t)]^a{}_b\,, \tag{12a}$$

$$:= \Omega^a{}_b(t)e_a \otimes \theta^b \qquad \text{mit} \quad \Omega^a{}_b(t) =: [\dot{D}(t)D^{-1}(t)]^a{}_b\,, \tag{12b}$$

sowie den ihr zugeordneten Vektor

$$\omega(t) = \omega'^a(t)e'_a(t) = \omega^a(t)e_a \quad \text{mit} \quad \omega'^a = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}\Omega'_{bc}\,, \quad \omega^a = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}\Omega_{bc}\,. \tag{13}$$

Dann hat man nämlich für jedes zeitabhängige Tupel $\vec{y'}(t)$, dass $(D\vec{y'})^\cdot = \dot{D}\vec{y'} + D\dot{\vec{y'}}$ wobei $\dot{D}\vec{y'} = \dot{D}D^{-1}D\vec{y'} = \Omega(D\vec{y'}) = \vec{\omega} \times (D\vec{y'}) = D\vec{\omega}' \times (D\vec{y'}) = D(\vec{\omega'} \times \vec{y'})$. Also ist $(D\vec{y'})^\cdot = D(\dot{\vec{y'}} + \vec{\omega'} \times \vec{y'})$. Zweimaliges Anwenden, Multiplizieren mit m_t (träger Masse) und auflösen nach $\ddot{\vec{x'}}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
m_t\ddot{\vec{x'}}(t) = {} & \vec{F}' && \text{äußere Kraft}\\
& - m_t\,\ddot{\vec{b'}}(t) && \text{tanslatorische Trägheitskraft}\\
& - 2m_t\,\vec{\omega'} \times \dot{\vec{x'}} && \text{Coriolis-Kraft}\\
& - m_t\,\vec{\omega'} \times (\vec{\omega'} \times \vec{x}') && \text{Zentrifugal-Kraft}\\
& - m_t\,\dot{\vec{\omega'}} \times \vec{x'} && \text{Euler-Kraft}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

wobei wir noch $m_T\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = D\vec{F'}$ und $\ddot{\vec{b'}} = D\ddot{\vec{b}}$ gestzt haben. Beachte, dass ein Pfeil immer für das 3-Tupel der Komponenten steht, und dass der Strich andeutet, dass sich die Komponenten auf die Basis $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ beziehen. Beachte insbesondere, dass $\omega = \omega^a e_a = \omega'^a e'_a \in \mathrm{Ker}(\tau)$ die Winkelgeschwindigkeit von $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ relativ zu $\{e_1, e_2, e_3\}$ bezeichnet, so dass sowohl die Komponenten $\vec{\omega}$ bezüglich $\{e_1, e_2, e_3\}$ als auch die Komponenten $\vec{\omega'}$ bezüglich $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ *diese* Winkelgeschwindigkeit repräsentieren (und nicht etwa $\vec{\omega'}$ die umgekehrte Winkelgeschwindigkeit von $\{e_1, e_2, e_3\}$ relativ zu $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, die das umgekehrte Vorzeichen hat).