Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 4

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Sei $\psi \in (\mathbb{R}^3)^*$ Vektor im Dualraum des $\mathbb{R}^3$. Sein Kern (auch Annihilator genannt) ist

$$Ker(\psi) := \{v \in \mathbb{R}^3 | \psi(v) = 0\} . \tag{1}$$

Wie üblich definiert das standard euklidische Skalarprodukt g des $\mathbb{R}^3$ einen Isomorphismus, der jedem $v \in \mathbb{R}^3$ ein $v^\flat \in (\mathbb{R}^3)^*$ zuordnet, gemäß

$$v^\flat(w) := g(v, w) , \qquad \forall w \in \mathbb{R}^3 . \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $Ker(v^\flat) = v^\perp$, wobei $v^\perp$ die Menge der Vektoren senkrecht zu v bezeichnet.

Im $\mathbb{R}^3$ mit Standardbasis $\{e_x, e_y, e_z\}$ und zugehörigen Koordinaten (x, y, z) betrachten wir das jetzt das Vektorfeld ($\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$K(x, y, z) := -(y/\rho)\, e_x + (x/\rho)\, e_y + e_z\, . \tag{3}$$

Interpretieren Sie dieses, indem Sie einige seiner Flusslinien qualitativ zeichnen. Machen Sie sich so die Distribution der zu K orthogonalen Unterräume geometrisch klar. Können Sie daraus ersehen, dass Sie je zwei Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch (zumindest stückweise) glatte Kurven tangential zur Distribution verbinden können?

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Frobenius, dass die Distribution $K^\perp$ nicht-integrabel ist. Berechnen Sie dazu die Rotation von K und ihr Skalarprodukt mit K.

Zeigen Sie, dass das zu K gehörige Dualvektorfeld gegeben ist durch

$$K^\flat(x, y, z) := -(y/r)\, dx + (x/r)\, dy + dz\, . \tag{4}$$

Bestätigen Sie ebenfalls durch Nachrechnen des Frobenius'schen Kriteriums $dK^\flat \wedge K^\flat \neq 0$, dass die zu $K^\flat$ gehörige Kerndistribution nicht integrabel ist.

Geben Sie schließlich die entsprechenden nicht-holonomen Zwangsbedingungen an.

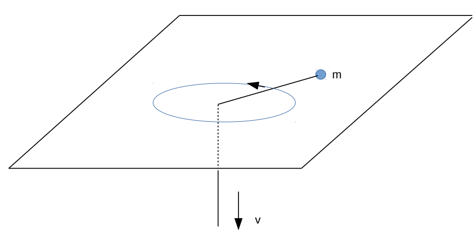
Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Eine Punktmasse (Masse m) rutsche reibungsfrei auf einer Kugel mit Radius R ab und fällt zu Boden.

1. Wie lautet die Zwangsbedingung und um welchen Typ Zwangsbedingung handelt es sich? Wann ist die Zwangsbedingung holonom?
2. Formulieren Sie die Lagrangegleichungen erster Art und bestimmen Sie die Zwangskraft.
3. Die Punktmasse starte bei einer Anfangshöhe z_0 mit Anfangsgeschwindigkeit v_0. Bei welcher Höhe verlässt die Punktmasse die Kugel?

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

Ein Teilchen der Masse m sei an einem Faden befestigt und rotiere um den Ursprung der x-y-Ebene. Zudem wird an dem Faden mit konstanter Geschwindigkeit v nach unten gezogen (siehe Abbildung).



1. Bestimmen Sie die Zwangsbedingungen und deren Typ.
2. Geben Sie die generalisierte Koordinate an und formulieren Sie die Gesamtenergie (unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung). Ist die Energie erhalten?

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

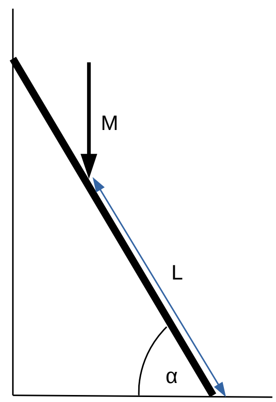
Das sphärische Pendel ist eine Punktmasse, die sich unter Einwirkung der Schwerkraft auf einer Kugeloberfläche bewegt (gehalten an einem masselosen Faden). Formulieren Sie die Zwangsbedingung. Um welchen Typ handelt es sich? Geben Sie die Lagrangegleichungen erster Art an. Es seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten. Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie E und der Impuls p_φ in φ-Richtung erhalten ist. Verwenden Sie diese erhaltenen Größen, um $\dot{\varphi}$ zu eliminieren und eine Gleichung für θ zu formulieren. Substituieren Sie in dieser Gleichung $u = \cos\theta$, so dass Sie die Gleichung auf folgende Form bringen können:

$$\dot{u}^2 + U(u) = 0 \, . \tag{5}$$

Bestimmen Sie $U(u)$ und diskutieren Sie qualitativ die Eigenschaften der Lösungen für u.

5 Punkte

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)



Eine Leiter der Länge l und der Masse m steht mit einem Neigungswinkel α an einer Wand (reibungsfrei) und wird von einer Person der Masse M bis zu einer Länge L bestiegen. Die Leiter soll am Boden eine Haftreibung erfahren mit einem Haftreibungskoeffizienten $\mu_H = 0,7$ (dabei ist die Haftreibungskraft gegeben durch $F_H = \mu_H F_\perp$, wobe $F_\perp$ die nach unten wirkende Kraft ist). Bis zu welchem Anstellwinkel α kann die Leiter zusammen mit der Person angelehnt werden, ohne weg zu rutschen?

5 Punkte

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Dies ist eine Fortführung der Präsenzübung 3 aus Blatt 3. Wir verwenden im Folgenden die gleiche Notation. Die kinetische Energie der Scheibe ist

$$T = \tfrac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \tfrac{1}{2} M \dot{\eta}^2 \ . \tag{6}$$

Dabei sind I_i Konstanten (Trägheitsmomente) und ϕ und θ wie in P3 auf aus Blatt 3. Bestimmen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art (wir wollen annehmen, dass keine externen Kräfte wirken). Geben Sie eine Lösung für den Winkel θ an und bestimmen Sie aus den übrigen Lagrangegleichungen die Lagrange-Multiplikatoren. Indem Sie die auch die zeitliche Entwicklung von ϕ bestimmen, können Sie nun auch die zeitliche Entwicklung der Zwangskräfte bestimmen. 5 Punkte