Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 5

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Der Zustand eines mechanisches Systems von f Freiheitsgraden wird durch $2f$ Koordinaten $(q^1, \cdots q^f\,,\, \dot{q}^1, \cdots \dot{q}^f)$ charakterisiert. Die Interpretation dieser Koordinaten spielt für das Folgende keine Rolle, aber man kann sich $q := (q^1, \cdots q^f)$ als Parameter der räumlichen Lage (Konfiguration) und $\dot{q} := (\dot{q}^1, \cdots \dot{q}^f)$ als deren zeitliche Änderungsraten denken.

Gegeben sei ein verallgemeinertes Kraftfeld mit f Komponenten $Q_a(t, q, \dot{q})$, $1 \le a \le f$. Zeigen Sie: Es gibt eine reellwertige Funktion $V(t, q, \dot{q})$, so dass für jede Kurve $t \mapsto \bigl(q(t), \dot{q}(t)\bigr)$ mit $\dot{q}(t) := dq(t)/dt$ gilt

$$Q_a\bigl(t, q(t), \dot{q}(t)\bigr) = -\frac{\partial V}{\partial q^a}\Big|_{\substack{q=q(t)\\ \dot{q}=dq(t)/dt}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^a}\Big|_{\substack{q=q(t)\\ \dot{q}=dq(t)/dt}}\right] \tag{1a}$$

genau dann, wenn V die Form hat

$$V(t, q, \dot{q}) = V_0(t, q) - V_i(t, q)\dot{q}^i\,. \tag{1b}$$

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

In der Elektrodynamik ist die von einem elektromagnetischen Feld $(\vec{E}, \vec{B})$ auf eine Punktladung e ausgeübte Kraft (Lorentzkraft) gegeben durch

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = e\bigl(\vec{E}(t, \vec{x}) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(t, \vec{x})\bigr)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass diese die Form (1a) hat indem Sie (1b) explizit angeben.
Tipp: Erinnern Sie sich dazu daran, wie das elektromagnetische Feld durch skalar- und Vektorpotential ausgedrückt werden kann.

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Nach Elimination der Zwangsbedingungen habe die kinetische Energie eines mechanischen Systems von f Freiheitsgraden die Form

$$T(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2} g_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b\,, \tag{3}$$

mit einer nicht weiter spezifizierten, von $q = (q^1, \cdots, q^f)$ abhängenden symmetrischen Koeffizientenmatrix g_{ab}. Die potentielle Energie verschwinde identisch.

Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen 2. Art identisch sind zu

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \big(g_{ab,c} - \tfrac{1}{2}g_{bc,a}\big)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0\,, \tag{4a}$$

wobei $g_{ab,c} := \partial g_{ab}/\partial q^c$.

Zeigen Sie weiter, dass falls $\det\{g_{ab}\} \neq 0$ dies äquivalent ist zu

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0\,, \tag{4b}$$

mit

$$\Gamma^a_{bc} := \tfrac{1}{2}g^{an}(-g_{bc,n} + g_{nb,c} + g_{cb,n})\,, \tag{4c}$$

wobei g^{ab} die zu g_{ab} inversen Matrix ist; d.h. $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$.

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Ein Teilchen bewege sich reibungsfrei auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R um den Ursprung des $\mathbb{R}^3$, auf die es durch nicht weiter spezifizierte Zwagskräfte gebunden bleibt.

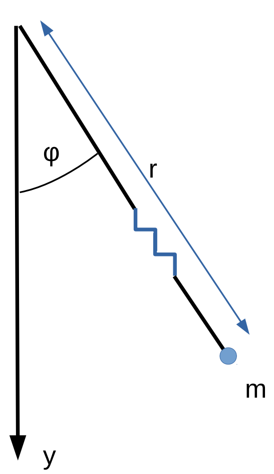
Parametrisieren Sie die Kugeloberfläche durch sphärische Polarwinkel (θ, φ) und geben Sie in diesen die kinetische Energie an. 1 Punkt

Stellen Sie die Langrange-Gleichung 2. Art für den Fall verschwindenden Potentials auf und zeigen/argumentieren Sie, dass die Lösungen genau die Großkreise sind. 2 Punkt

Stellen Sie die Langrange-Gleichung 2. Art für den Fall eines Potentials $V(\vec{x}) = mgz$ (homogenes Gravitationsfeld in Richtung der negative z-Achse) auf. 2 Punkt

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

Eine Masse m sei an einer Feder (Federkonstante k) im homogenen Schwerefeld aufgehängt. Wie in der Abbildung gezeigt, besteht die Bewegung der Masse also aus einer Pendelbewegung und einer longitudinalen Federschwingung.

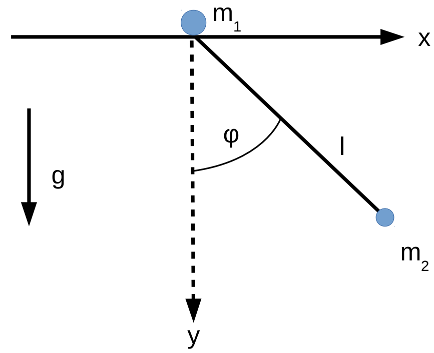


Bestimmen Sie die generalisierten Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

Leiten sie die Bewegungsgleichungen ab und interpretieren Sie die auftretenden Terme.

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Eine Masse m_1 sei durch eine masselose Stange der Länge l mit einer Masse m_2 verbunden. Während m_2 eine Pendelbewegung im homogenen Schwerefeld ausführt, kann sich m_1 wie in der Abbildung dargestellt reibungsfrei bewegen:



Finden Sie die Zwangsbedingungen und klassifizieren Sie diese. Geben Sie weiterhin generalisierte Koordinaten an. 1 Punkt

Formulieren Sie die Lagrangefunktion. Finden Sie eine generalisierte Koordinate, von der die Lagrangefunktion nicht abhängt. Geben Sie aufgrund dieser Beobachtung eine Erhaltungsgröße an. *Hinweis*: Benutzen Sie die Lagrange-Gleichungen für diese Koordinate. 2 Punkte

Mit Hilfe des oben bestimmten Erhaltungssatzes, bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der oben gefundenen generalisierten Koordinate. Bestimmen Sie schließlich die zeitliche Entwicklung des Winkels φ für kleine φ (d.h. $\cos\varphi \approx 1$ und $\sin\varphi \approx \varphi$). 2 Punkte