Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 6

Aufgabe CU1 (Computerübung)

Wir betrachten nochmals das sphärische Pendel wie in Aufgabe H1 aus Blatt 4, also eine Punktmasse, die sich im homogenen Schwerefeld auf einer Kugeloberfläche bewegt. Für große Auslenkungen der Punktmasse sind die Lösungen der Beweguns-gleichugen nur noch numerisch bestimmbar. Wir wollen in dieser Computerübung Trajektorien der Punktmasse zu verschiedenen Anfangsbedingungen simulieren und numerisch Aussagen über die Perioden in den Polarwinkeln (θ, φ) ableiten.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Lagrangegleichungen zweiter Art. Für die φ-Gleichung können Sie sogar eine Gleichung erster Ordnung angeben, da der entsprechende Impuls p_φ erhalten ist.

- Wir wollen nun dieses System einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung und einer Differenzialgleichung erster Ordnung numerisch lösen. Verwenden Sie $r = 1$ für den Radius der Kugel und $g = -9.81$ für die Gravitationskonstante. Definieren Sie in Mathematica die Variablen θ und ϕ und die Konstanten θ_0, ϕ_0, $\dot{\theta}_0$ und p_φ für die Anfangswerte und für den erhaltenen Impuls p_φ. Außerdem wird eine Zeitskala t_{max} benötigt (für die Dauer der Simulation). Verwenden Sie nun den Befehl **`NDSolve`**, um das System von Differenzialgleichungen zu lösen und speichern Sie die Lösung unter einem neuen Namen ab. Verwenden Sie schließlich den Befehl **`ListAnimate`**, um die Lösung in einer Animation auszugeben. *Hinweise:* Werten Sie dazu die kartesischen Koordinaten $x = \sin\theta(t)\cos\phi(t)$, $y = \sin\theta(t)\sin\phi(t)$ und $z = \cos\theta(t)$ mit dem Befehl **`Evaluate`** auf der Lösung aus und benutzen Sie **`ParametricPlot3D`** für den plot der Trajektorie. Um die Anzahl der Bilder in der Simulation zu kontrollieren, benutzen Sie **`Table`** mit einer Maximalanzahl von etwa 500 frames.

- Machen Sie sich mit dem Verhalten der Lösungen vertraut, indem Sie die Animation für verschiedene Anfangswerte abspielen. Beginnen Sie mit kleinen Auslenkungen der Punktmasse (etwa $\theta_0 = -3.0$ ohne Anfangsgeschwindigkeiten). Was sehen Sie? Testen Sie nun allgemeine Anfangswerte. Werden die Werte $\theta = \pm\pi$ angenommen?

- Die Periode für eine Schwingung im Winkel θ ist gegeben durch

$$T = \int_{u_1}^{u_2} \frac{4\,du}{\sqrt{-U(u)}}\,, \tag{1}$$

wobei $U(u)$ die Funktion aus Blatt 4 ist und die Integrationsgrenzen Nullstellen von $U(u) = 0$ sind. Überlegen Sie wann der Nenner im Integral definiert ist, und als Folge davon, welche zwei Nullstellen zu wählen sind. Weiterhin ist die Präzession in φ gegeben durch

$$2\pi + \Delta\varphi = \ 4p_\varphi \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{-U(u)}} \ . \tag{2}$$

Um die Nullstellen zu bestimmen, können Sie den einfachen Befehl **`Solve`** verwenden. Benutzen Sie den Befehl **`NIntegrate`** um die beiden Integrale zu berechnen. Bestimmen Sie die Integrale für verschiedene Werte der Gesamtenergie E und des Impulses p_φ.

- *Für Spezialisten*: Versuchen Sie, systematisch einen gewissen Bereich in der (E, p_φ)-Ebene abzudecken. Können Sie Paare von Parametern (E, p_φ) finden, die die gleichen Perioden T und $\Delta\varphi$ haben? Solche Paare werden *Isofrequenzpaare* genannt.

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Man betrachte ein einzelnes freies Teilchen der Masse m. Seine Langrange-Funktion ist einfach $L = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{x}}\|^2$.

Zeigen Sie, dass die einparametrige Schar von Streckungen (Scharparameter s)

$$T_s : \vec{x} \mapsto T_s(\vec{x}) := \exp(s)\,\vec{x} \tag{3}$$

Symmetrien der Euler-Lagrange-Gleichungen sind, aber keine Noether-Symmetrien. Gibt es einen Erhaltungssatz zu dieser Symmetrie? Wie transformiert die Wirkung unter (3)?

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Man denke sich eine Langrangefunktion $L = T - V$ eines einzelnen Teilchens, mit T= kinetische Energie und einem äußeren Potential V, das invariant ist unter der einparametrigen Schar von Transformationen

$$T_s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto T_s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x\,\cos(\omega s) - y\,\sin(\omega s) \\ x\,\sin(\omega s) + y\,\cos(\omega s) \\ z + s \end{pmatrix} \ . \tag{4}$$

Geben Sie die zugehörige erhaltene Größe an.

Können Sie ein Beipiel eines Potentials angeben, dass diese aber sonst keine weiteren Symmetrien besitzt?

Tipp: Um eine Übersicht über alle invarianten Potentiale zu bekommen, kann man aus $V(T_s\vec{x}) = V(\vec{x})$ durch Differentiation nach s ableiten, dass $\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} V = 0$, wobei $\xi := dT_s\vec{x}/ds|_{s=0}$. Zeigen Sie z.B., dass in Zylinderkoordinaten (z, ρ, φ) jede Funktion V der zwei Variablen ρ und $\zeta := \omega z - \varphi$ diese Gleichung erfüllt. Achtung: Damit V eine Funktion auf $\mathbb{R}^3$ ist, muss $V(z, \rho, \varphi + 2\pi) = V(z, \rho, \varphi)$ gelten, also die Abhängigkeit von ζ periodisch sein.

Aufgabe P3 (Präsenzübung)

Ein mechanisches System von f Freiheitsgraden sei in seinen Konfigurationen durch die Koordinten $q = (q^1, \cdots q^f)$ parametrisiert. Sein Zustand ist durch diese und die weiteren f Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{q} = (\dot{q}^1, \cdots \dot{q}^f)$ gegeben. Eine Langrangefunktion L hängt i.A. von den $2f + 1$ Variablen $(t, q, \dot{q})$ ab.

Wir fragen, wann zwei solche Funktionen L und L' zu *identischen* Euler-Lagrange-Gleichungen führen, wann also für $\Delta := L' - L$ gilt, dass

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Delta}{\partial \dot{q}^a}\Big|_{\substack{q=q(t)\\ \dot{q}=dq(t)/dt}} - \frac{\partial \Delta}{\partial q^a}\Big|_{\substack{q=q(t)\\ \dot{q}=dq(t)/dt}} = 0 \tag{5}$$

für *alle* Trajektorien $q(t)$ gilt.

Zeigen Sie, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Funktion $\Delta(t, q, \dot{q})$ die folgende Gestalt hat:

$$\Delta(t, q, \dot{q}) = f(t) + \partial_t \phi(t, q) + \partial_a \phi(t, q)\dot{q}^a\,, \tag{6}$$

wobei f und ϕ zwei beliebige Funktionen sind die von t bzw. (t, q) abhängen. Mit ∂_t und ∂_a bezeichnen wir die partiellen Ableitungen nach t bzw. q^a.

Was bedeutet die Form (6) für die Zeitfunktion $t \mapsto \Delta\big(t, q(t), dq(t)/dt\big)$?

Tipp: Schreiben Sie (5) *explizit aus und folgern Sie aus der Forderung, dass* (5) *für alle Trajektorien $q(t)$ gelten soll, dass Δ höchstens linear von $\dot{q}$ abhängen darf. Schreiben Sie damit die soweit allgemeine Form von Δ an und schließen Sie aus* (5) *und mit Hilfe des Poincaré'schen Lemmas weiter, dass die Koeffizientenfunktionen von $\dot{q}^a$ Gradienten sind. Erneutes Einsetzen in* (5) *ergibt* (6).

Bedenken Sie: Die Forderung, dass L und L' zu *identischen* Euler-Lagrange-Gleichungen führen sollen, ist stärker als die Forderung, dass die Gleichungen *äquivalent* seien, also identische Lösungskurven besitzen. Die erste Forderung impliziert die zweite, aber nicht umgekehrt. Belegen Sie dies durch ein Beispiel.