Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 7

P1 (Präsenzübung)

Diese und die folgende Übung ist eine Fortsetzung der Übung H1 von Blatt 2, die uns bei der analytischen Darstellung von Drehungen sehr nützlich sein wird.

Wir hatten mit Hilfe der linearen Abbildungen $\lambda_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\lambda_a(\vec{x}) := \vec{e}_a \times \vec{x}$, gesehen, dass $\exp(\alpha^a \lambda_a)$ eine orthogonale Drehung mit Winkel $\alpha := \|\vec{\alpha}\|$ um die von $\vec{\alpha}$ erzeugte Achse ist.

Sei nun $D \in SO(3)$ eine beliebige Drehung. Zeigen Sie, dass

$$D\lambda_b D^{-1} = D^a{}_b \lambda_a \,, \tag{1}$$

wobei $D^a{}_b$ die Komponenten von D bezüglich der Standardbasis (orthonormiert bezüglich standard Skalarprodukt) sind.

Tipp: In Komponenten ist $(\lambda_a)^b{}_c = \varepsilon_{ac}{}^b$. Schreiben Sie (1) *in Komponenten und zeigen Sie, dass diese äquivalent ist der Gleichung $D^l{}_a D^m{}_b D^n{}_c \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{abc}$.*

Eine allgemeine Drehung $D \in SO(3)$ kann durch drei aufeinander folgende Drehungen um die dritte, zweite und wieder Achse mit Winkeln bzw. ψ, θ und φ ausgedrückt werden:

$$D(\varphi, \theta, \psi) = D(\vec{e}_3, \varphi) \cdot D(\vec{e}_1, \theta) \cdot D(\vec{e}_3, \psi) \,. \tag{2}$$

Diese nennt man die *Euler'schen Winkel* in der (3-1-3)–Konvention, wobei entweder $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ (Endpunkte identifiziert) und $\theta \in [0, \pi]$ (Endpunkte nicht identifiziert), oder $\varphi, \psi \in [-\pi, \pi]$ (Endpunkte identifiziert) und $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ (Endpunkte nicht identifiziert). Wie benutzen die 2. Konvention.

Zeigen Sie, dass dann

$$\big[D(\varphi, \theta, \psi)\big]^{-1} = D(-\psi\,,\, -\theta\,,\, -\varphi) \,. \tag{3}$$

Wir betrachten nun zeitabhängige Drehungen, nehmen also an, die Euler'schen Winkel hängen von t ab.

Wir erinnern uns, dass den Vektor der Winkelgeschwindigkeit, dessen Komponenten bezüglich der raumfesten und körperfesten Basis gegeben sind durch bzw.

$$\omega^a(t) \;=\; -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}\left[\dot{D}(t)D^{-1}(t)\right]_{bc} \,, \tag{4a}$$

$$\omega'^a(t) \;=\; -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{abc}\left[D^{-1}(t)\dot{D}(t)\right]_{bc} \,. \tag{4b}$$

Beachte: In der Vorlesung haben wir die Komponenten im körperfesten System mit einem Hut statt einem Strich gekennzeichnet.

Zeigen Sie: Ist $D(t) = D(\vec{e}_a, \alpha(t))$, dann folgt aus $D(\vec{e}_a, \alpha(t)) = \exp(\alpha(t)\lambda_a)$, dass

$$\dot{D}(t)D^{-1}(t) = D^{-1}(t)\dot{D}(t) = \dot{\alpha}(t)\lambda_a\,. \tag{5}$$

H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Diese Übung bezieht sich direkt auf P1.

Sei $D(t) = D\big(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)\big)$ wie in (2). Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass (die Argumente t sind hier unterdrückt) 4 Punkte

$$\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\theta}\,\cos\varphi + \dot{\psi}\,\sin\varphi\,\sin\theta\\ \dot{\theta}\,\sin\varphi - \dot{\psi}\,\cos\varphi\,\sin\theta\\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\,\cos\theta\end{pmatrix}, \tag{6a}$$

$$\begin{pmatrix}\omega'^1\\ \omega'^2\\ \omega'^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\theta}\,\cos\psi + \dot{\varphi}\,\sin\psi\,\sin\theta\\ -\dot{\theta}\,\sin\psi + \dot{\varphi}\,\cos\psi\,\sin\theta\\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\,\cos\theta\end{pmatrix}. \tag{6b}$$

Argumentieren Sie, dass man (6b) nicht eigens berechnen muss, sondern vielmehr aus (6a) erhalten kann, indem man berücksichtigt, dass $D^{-1}\dot{D} = -\dot{C}C^{-1}$ mit $C := D^{-1}$, und dann (3) benutzt. 1 Punkt

P2 (Präsenzübung)

Wir betrachten die starre Bewegung einer Menge von N Punktteilchen. Die Komponenten der Ortsvektoren bezüglich eines Inertialsystems heißen wie üblich $\vec{x}_a$, $a = 1, \cdots, N$. Wie in der Vorlesung setzen wir $\vec{x}_a = \vec{R} + \vec{y}_a$, wobei $\vec{R}$ die Koordninaten des Schwerpunks bezeichnet. Es gilt dann $\dot{\vec{y}}_a = \vec{\omega} \times \vec{y}_a$, wobei $\vec{\omega}$ die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezüglich des raumfesten (inertialen) Systems sind.

Zeigen Sie, dass die kinetische Energie des Gesamtsystems gegeben ist durch

$$T = \tfrac{1}{2}M\|\dot{\vec{R}}\|^2 + \tfrac{1}{2}I_{ij}\omega^i\omega^j = T_{trans} + T_{rot} \tag{7}$$

wobei T_{trans} den translatorischen Anteil (Schwerpunktsbewegung) und T_{rot} den rotatorischen Anteil (Drehbewegung um den Schwerpunkt) bezeichnet und I_{ij} die Komponenten des Trägheitstensors. Würde die kinetische Energie auch bei jeder anderen Wahl des Referenzpunktes $\vec{R}$ (anders als der Schwerpunkt) in die zwei entsprechenden Anteile zerfallen?

Ruht der Schwerpunkt im Inertialsystem, so ist die gesamte kinetische Energie rotatorisch. Dann gilt

$$T = \tfrac{1}{2}I_{ij}\omega^i\omega^j = \tfrac{1}{2}I'_{ij}\omega'^i\omega'^j\,, \tag{8}$$

wobei sich die gestrichenen Komponenten auf das körperfeste (nicht inertiale) System beziehen.

Die Drehipulskomponenten im raum- und körperfesten Systems sind $J^i = I^i{}_j\omega^j$ bzw. $J'^i = I'^i_j\omega'^j$. Angenommen es wirken keine äußeren Drehmomente, welche der folgenden Größen sind dann konstant: J^i, J'^i, J^iJ_i, $J'^iJ'_i$?

Stellen Sie sich die kinetische Energie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als Funktion der drei Parameter $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ vor und betrachten Sie die Fläche $T_E := \{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3 : T(\vec{\omega}) = E\} \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dieser ein Ellipsoid mit Halbachsen $\sqrt{2E/I_i}$ ist, wobei I_i, $i = 1, 2, 3$ die Eigenwerte der Trägheitsabildung sind. Zeigen Sie weiter, dass der zu $\vec{\omega}$ gehörige Drehimpuls im allgemeinen nicht parallel zu $\vec{\omega}$ zeigt, sondern parallel zur Normalen auf der Tangentialebene an T_E am Punkte $\vec{\omega}$. Machen Sie sich diese Verhälntnisse an einer Zeichnung klar.

H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Wir betrachten einen starren Körper mit ruhendem Schwerpunkt, dessen Hauptträgheitsmomente einfach entartet sind; d.h. es gilt $I'_1 = I'_2 \neq I'_3$. Zeigen Sie mit Hilfe von (6b), dass seine kinetische Energie als Funktion der Eulerwinkel folgende Form hat: 2 Punkte

$$T = \tfrac{1}{2} I'_1 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) + \tfrac{1}{2} I'_3 (\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\varphi})^2\,. \tag{9}$$

Stellen Sie damit für den Fall fehlender äußerer Kräfte (keine Drehmomente), d.h. $L = T$, die Euler-Lagrange-Gleichungen auf. Da L von φ und ψ unabhängig ist (sogenannte „zyklische Koordinaten“), können Sie sofort zwei damit assoziierte erhaltene Größen angeben. Wie lauten diese und was ist ihre Bedeutung? Wie viele erhaltende Größen gibt es insgesamt in diesem Bewegungsproblem. 2 Punkte 1 Punkt

H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Behandelt man die Erde als starren Körper mit einfach entarteten Hauptträgheitsmomenten $I'_1 = I'_2 \neq I'_3$ und nehmen an, auf sie wirke von außen kein Drehmoment (was natürlich nicht stimmt - warum nicht?), dann wissen wir aus der Vorlesung (Integration der Euler-Gleichungen für diesen Fall), dass im körperfesten System der Vektor der Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse (= Eigenrichtung zum nicht-ausgearteten Hauptträgheitsmoment) präzediert, und zwar mit Winkelgeschwindigkeit

$$\lambda = \omega'^3 \frac{I'_3 - I'_1}{I'_1}\,. \tag{10}$$

Schätzen Sie Sie diesen für die Erde ab, indem Sie den Quotienten $(I'_3 - I'_1)/I'_1$ unter der (stark idealisierenden) Annahme berechnen, dass die Erde ein abgeplatteter Rotationsellipsoid konstanter Dichte sei mit Äquatorradius $6.378.137\,m$ und Polradius $6.356.752\,m$. 2 Punkte

Zeigen Sie dazu zunächst allgemein, dass die Hauptträgheitsmomente eines Ellipsoids $(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leq 1$ mit Halbachsen a_i und räumlich homogen verteilter Masse M gegeben sind durch 3 Punkte

$$I'_i = \tfrac{1}{5}(a_j^2 + a_k^2) M \qquad (i, j, k \quad \text{zyklisch})\,. \tag{11}$$

Übrigens: Der Punkt, an dem die Figurenachse die Erdoberfläche durchstößt heißt *geometrischer Nordpol* und der Punkt, an dem der vom Vektor der Winkelgeschwindigkeit erzeugte positive Halbstrahl die Erdoberfläche durchstößt *kinematischer Nordpol*. Der kinematische Nordpool wandert also mit einer bestimmten Periode um den geometrischen Nordpol auf der so genannten *Polhodie*.