Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 8

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Ein ideal bigsames Seil von konstanter Masse pro Längeneinheit μ und Länge ℓ hänge frei, nur mit seinen Enden an den Punkten $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ befestigt, in homogenen Gravitationsfeld $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. (Damit dies möglich ist, muss natürlich $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \ell$ sein.) Dabei beschreibt das Seil eine Kurve $[\lambda_1, \lambda_2] \ni\mapsto \vec{x}(\lambda) \in \mathbb{R}^3$, parametriesiert durch einen nicht weiter spezifizierten Parameter λ mit $\vec{x}(\lambda_{1,2}) = \vec{x}_{1,2}$, die es zu bestimmen gilt. Dazu soll das Prinzip angewendet werden, dass die Kurve so sein wird, dass Sie ihre potentielle Energie im Gravitationsfeld (bei fest gehaltenen Endpunkten und fester Länge) minimiert.

Zeigen Sie, dass die Potentielle Energie bis auf eine additive Konstante gegeben ist durch

$$E_{pot} = \mu g \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \, z(\lambda) \sqrt{\dot{x}^2(\lambda) + \dot{y}^2(\lambda) + \dot{z}^2(\lambda)} \, . \qquad (1)$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach λ bezeichnet.

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichnungen für die zyklischen Variablen x und y, dass die Kurve in einer zur xy-Ebene senkrechten Ebene verläuft.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie also annehmen, die Kurve verlaufe in der zx-Ebene. Schreiben Sie dann (1) um, indem Sie x als Parameter, d.h. $x \mapsto z(x)$ als Darstellung der Kurve verwenden. Statt der Euler-Lagrange-Gleichung für $z(x)$ stellen Sie gleich den Erhaltungssatz auf, der aus der Tatsache folgt, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von x abhängt. und finden Sie daraus die Lösung für ein Seil der Länge ℓ durch die Punkte $(x_1, z_1) = (0, 0)$ und $(x_2, z_2) = (x_*, z_*)$. (Das ist elementar möglich und die Kurve werden/sollten Sie erkennen.)

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Ähnlich wie in Aufgabe P1 betrachte man eine Kurve $\vec{x}(\lambda)$ zwischen den Punkten $\vec{x}(\lambda_{1,2}) = \vec{x}_{1,2}$ im Raum mit homogenen Gravitationsfeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Wir stellen uns diesmal vor, entlang dieser Kurve könne ein Masssenpunk von $\vec{x}_1$ nach $\vec{x}_2$ infolge der Einwirkung des Gravitationsfeldes reibungsfrei gleiten, wobei natürlich $z_1 > z_2$ sein soll. Wir fragen uns, wie die Kurve geformt sein muss, damit die Zeit, die die Masse für diesen Gleitvorgang von $\vec{x}_1$ nach $\vec{x}_2$ benötigt, möglichst klein wird.

Zeigen Sie: Lässt man die Masse bei $\vec{x}_1$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t = 0) = \vec{0}$ los, 1 Punkt dann ist die Zeit, nach der die Masse $\vec{x}_2$ entlang der Kurve $\vec{x}(\lambda)$ erreicht, gegeben durch

$$T = \sqrt{\frac{1}{2g}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\frac{\dot{x}^2(\lambda) + \dot{y}^2(\lambda) + \dot{z}^2(\lambda)}{z_1 - z(\lambda)}} \,. \tag{2}$$

Tipp: Es ist $T = \int dt$. Aber $dt = ds/v$, wobei $ds = d\lambda\sqrt{\dot{x}^2(\lambda) + \dot{y}^2(\lambda) + \dot{z}^2(\lambda)}$ das Differential der Bogenlänge entlang der Kurve ist und v die Geschwindigkeit, mit der die Masse die Kurve an der betreffenden Stelle durchläuft. Letztere ist aber durch den Energiesatz als Funktion des Ortes sofort bestimmbar.

Zeigen Sie wieder mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen für die zyklischen Variablen x und y, dass die Lösungskurve in einer Ebene senkrecht zur xy-Ebene verläuft. (1 Punkt) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie also wieder annehmen, die Kurve verlaufe in der zx-Ebene. Schreiben Sie dann (2) wieder um, indem Sie x als Parameter, d.h. $x \mapsto z(x)$ als Darstellung der Kurve verwenden. (1 Punkt) Stellen Sie den Erhaltungssatz auf, der aus der Tatsache folgt, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von x abhängt. (1 Punkt) Finden Sie damit die optimale Kurve kürzester Fallzeit zwischen den Punkten $(x_1, z_1) = (0, 0)$ und $(x_2, z_2) = (x_*, z_* < 0)$ (Tipp: Siehe unten). (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $x_2 > -z_*\pi/2$ die Kurve zum Teil unterhalb z_* fällt. Wie erklären Sie sich das? (1 Punkt)

Tipp: Es ist für die Integration günstig, die Substitution $z = -r_0(1 - \cos\varphi) = -2r_0\sin^2(\varphi/2)$ vorzunehmen.

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

In der Vorlesung wurden die Euler'schen Gleichungen des kräftefreien Kreisels diskutiert:

$$I_1\dot{\omega}'_1 \;=\; \omega'_2\omega'_3(I'_2 - I'_3)\,, \tag{3a}$$
$$I_2\dot{\omega}'_2 \;=\; \omega'_3\omega'_1(I'_3 - I'_1)\,, \tag{3b}$$
$$I_3\dot{\omega}'_3 \;=\; \omega'_1\omega'_2(I'_1 - I'_2)\,. \tag{3c}$$

Dabei sind die gestrichenen Komponenten der Winkelgeschwindigkeit auf die körperfeste orthonormierte Basis bezogen, die darüberhinaus so gewählt ist, dass sie die Trägkeitsabbildung diagonalisiert mit Eigenwerten I'_1, I'_2 und I'_3, die wir als paarweise verschieden (unsymmetrischer Kreisel) voraussetzen. Wir machen keine Annhame darüber, welche dieser drei Eigenwerte der größte, mittlere und kleinste ist.

Wir betrachten die Bewegung um die erste Hauptträgheitsachse, also $\omega'^1 =: p = konst.$ und $\omega'^2 = \omega'^3 = 0$. Wir fragen, ob diese Bewegung stabil ist. Dazu betachten wir Bewegungen in der Nähe, für die also gilt

$$\omega'^1(t) \;=\; p + \Delta p(t)\,, \tag{4a}$$
$$\omega'^2(t) \;=\; \Delta q(t)\,, \tag{4b}$$
$$\omega'^2(t) \;=\; \Delta r(t)\,. \tag{4c}$$

Setzen Sie dies in die Euler Gleichungen ein und vernachlässigen Sie alle Potenzen in Δp, Δq und Δr jenseits der ersten (d.h. Sie linearisieren die Euler-Gleichungen).

Zeigen Sie, dass die linearisierten Euler-Gleichungen zu $\Delta p(t) =: k = konst.$ führen und zu ($\Delta\dot{q} := d\Delta q/dt$ etc.)

$$\Delta\dot{q} \;=\; \frac{I'_3 - I'_1}{I'_2}\, p\,\Delta r\,, \tag{5a}$$

$$\Delta\dot{r} \;=\; \frac{I'_1 - I'_2}{I'_3}\, p\,\Delta q\,. \tag{5b}$$

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Diskutieren Sie das System (5) für die drei Fälle vollständiger Entartung (Fall 1: $I'_1 = I'_2 = I'_3$), teilweiser Entartung (Fall 2a: $I'_1 = I'_2 \neq I'_3$ und Fall 2b: $I'_1 \neq I'_2 = I'_3$) und keiner Entartung (Fall 3: Alle I'_i paarweise verschieden), wobei im Fall 3 keine Annahme darüber gemacht wird, welche der Eigenwerte der kleinste, mittlere und größte ist. Lösen Sie die Differentialgleichungen in jedem einzelnen Fall und nennen Sie alle Möglichkeiten nicht-beschränkter Lösungen (also Lösungen, die für $t \to \infty$ nicht beschränkt bleiben). Beweisen Sie damit insbesondere den Satz für Fall 3, dass Drehungen um die Hauptachsen mit größtem und kleinstem Trägheitsmoment stabil, um die mittlere Hauptachse jedoch instabil sind.

2 Punkte

1 Punkt

Tipp: Im Fall 2b können Sie (5) *komplex zusammenfassen. Fall 3 entkoppeln Sie (5) durch nochmaliges Differenzieren. Bedenken Sie: Die dann erhaltenen allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen 2. Ordung müssen aber auch den ursprünglichen Gleichungen erster Ordung genügen.*

Diskutieren Sie das so erhaltene Ergebnis in Zusammenhang mit den bereits in der Vorlesung besprochenen Gleichungen — 2 Punkte

$$J^2 \;=\; (J'^1)^2 + (J'^2)^2 + (J'^3)^2\,, \tag{6a}$$

$$E \;=\; \frac{(J'^1)^2}{2I'_1} + \frac{(J'^2)^2}{2I'_2} + \frac{(J'^3)^2}{2I'_3} \tag{6b}$$

und den im Anhang gezeigten Bildern, die die möglichen Schnittkurven der Sphäre (6a) mit dem Ellipsoid (6b) im $\mathbb{R}^3$ der drei Komponenten J'^i zeigen. Ordnen Sie je ein horizontales Bildpaar einer Drehung um einer der Hauptachsen (welcher?) zu.

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Gleichungen allgemein, dass die Bewegungen des freien Kreisels mit zeitunabhängigen Komponenten ω'^i genau die um die Hauptträgheitsachsen sind.

Anhang: Bilder zu Aufgabe H1