Übungen zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16

Analytische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie

von Domenico Giulini

Blatt 9

Aufgabe P1 (Präsenzübung)

Wir wiederholen nochmals die Definition des Trägheitsabbildung aus der geometrischen Sicht der Raum-Zeit: In einer Newton-Galilei Raumzeit (M, V, τ, h) bewegen sich N Punktmassen m_a, $a = 1, \cdots, N$, auf Weltlinien $\gamma_a : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto \gamma_a(t)$, wobei der Parameter t so gewählt ist, dass $\tau(\gamma_a(t) - o_*) = t$, d.h. t ist der (absolute) zeitliche Abstand zum ein für allemal fest gewählten Punkt o_* (der weiter keine Rolle spielen wird). Die Lagen der Punkte zum gleichen Parameterwert t sind somit gleichzeitig.

Zur Erinnerung: Es war $\mathrm{Ker}(\tau) = \{v \in V : \tau(v) = 0\} \subset V$ der zugehörige Vektorraum zu den affinen Unterräumen $\Sigma_t := \{p \in M : \tau(p - o_*) = t\}$ jeweils untereinander gleichzeitiger Ereignisse. Wählt man irgend eine Referenzweltlinie $o : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto o(t)$, dann ist die Trägheitsabbildung $I_o(t)$, zum Zeitpunkt t ein bezüglich h symmetrischer Endomorphismus von $\mathrm{Ker}(\tau)$, gegeben durch

$$I_o(t) := \sum_{a=1}^{N} m_a \Big[\|\gamma_a(t) - o(t)\|_h^2 \mathbf{1} - \big(\gamma_a(t) - o(t)\big) \otimes \big(\gamma_a(t) - o(t)\big)^{\downarrow} \Big] . \qquad (1)$$

Hier ist $\mathbf{1}$ die Identitätsabbildung in $\mathrm{Ker}(\tau)$ und $\|\cdot\|_h$ die durch h definierte Norm auf $\mathrm{Ker}(\tau)$. Außerdem benutzen wir die Notation $v^{\downarrow} := h(v, \cdot)$.

Die Schwerpunktsweltlinie $s : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto s(t)$, war definiert durch

$$s(t) := \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{M} \gamma_a(t) , \qquad (2)$$

wobei M die Summe aller Massen m_a ist. Beachten Sie, dass (2) als konvexe Summe (d.h. mit positiven Koeffizienten deren Summe 1 ist) von Punkten im affinen Raum wohldefiniert ist.

Zeigen Sie den *Steiner'schen Satz*,

$$I_o(t) := I_s(t) + M \Big[\|R(t)\|_h^2 \mathbf{1} - R(t) \otimes R^{\downarrow}(t) \Big] , \qquad (3)$$

wobei $R(t) := o(t) - s(t)$

Aufgabe H1 (Hausübung, 5 Punkte)

Der zur Trägheitsabbildung I_o assoziierte Trägheitstensor ist definiert durch („Index runterziehen" mit h)

$$I_o^{\downarrow}(v, w) := h\big(v, I(w)\big)\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Steiner'schen Satzes, dass die Schwerpunktsweltlinie den Trägheitstensor minimiert, d.h. es gilt für alle $v \in \mathrm{Ker}(\tau)$: 2 Punkte

$$I_o^{\downarrow}(v, v) \geq I_s^{\downarrow}(v, v)\,. \tag{5}$$

Seien $\lambda_o^1 \leq \lambda_o^2 \leq \lambda_o^3$ und $\lambda_s^1 \leq \lambda_s^2 \leq \lambda_s^3$ die Eigenwerte von I_o und I_s zu jeweils gleichen Zeiten. Gilt nun jeweils $\lambda_o^a \geq \lambda_s^a$? Erklären Sie! 1 Punkt

Beweisen Sie die Identität (Lagrange) 2 Punkte

$$\mathrm{Spur}(I_s(t)) = \sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} \frac{m_a m_b}{M} \left\|\gamma_a(t) - \gamma_b(t)\right\|_h^2\,. \tag{6}$$

Aufgabe P2 (Präsenzübung)

Berechnen Sie die Hamiltonfunktion eines freien Teilchens sowohl als Funktion der Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und ihrer konjugierten Impulse (p_ρ, p_φ, p_z) als auch der Kugelkoordinaten (r, θ, φ) und ihrer konjugierten Impulse $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$.

Aufgabe H2 (Hausübung, 5 Punkte)

Berechnen Sie die Hamiltonfunktion des freien unsymmetrischen Kreisels als Funktion der Eulerwinkel (φ, θ, ψ) und deren konjugierte Impulse $(p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$. Drücken Sie dazu die kinetische Energie des Kreisels in Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezüglich des körperfesten Systems aus, wobei Sie Gleichung (6b) von Aufgabe H1 auf Blatt 7 benutzen können. 2 Punkte Berechnen Sie daraus zuerst die konjugierten Impulse als Funktion der Eulerwinkel und ihrer Zeitableitung sowie umgekert die Zeitableitung der Eulerwinkel als Funktion der Eulerwinkel und ihrer Impulse. 2 Punkte Was würde sich außer der Umbenennung der Winkel ändern, wenn man stattdessen die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bezüglich des raumfesten Systems zusammen mit Gleichung (6b) benutzen würde? 1 Punkt

Aufgabe H3 (Hausübung, 5 Punkte)

Ort und Geschwindigkeit eines freien Teilchens werde beschrieben durch ihre Komponenten bezüglich einer orthonormierten Basis, die im Inertialsystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Geben Sie die Lagrange-Funktion in diesen Koordinaten an 2 Punkte und berechnen Sie die konjugierten Impulse und die Hamilton-Funktion. 2 Punkte Welche Besonderheit fällt ihnen bezüglich der Implementation der geschwindigkeitsabhängigen (Schein-)Kräfte auf, die Sie bereits vom Beispiel der Lorentz-Kraft der Elektrodynamik (s.Vorlesung) beobachten konnten? 1 Punkt